Politecnica s.r.l

Parte "D" – Stabilità e sollecitazioni delle strutture ed Opere Civili

Programma:

– Fondamenti di scienza e tecnica delle costruzioni (4h)

– Linee in trincea, in rilevato, in galleria (2h)

– Gallerie, analisi del rischio e sistemi di protezione (2h)

Durata: 8 ore

Modalità di erogazione: FAD sincrona

Ing. Elena Di Mare, Ph.D

Aprile 2026

FONDAMENTI DI SCIENZA E TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Aprile 2026

INDICE

1. **Analisi della tensione e Analisi della deformazione**
2. **Il comportamento dei materiali**
3. **Approfondimento sui criteri di resistenza**
4. **Progetto e verifica delle strutture**
5. **Monitoraggio dello stato di salute delle strutture (SHM)**

Obiettivi: ripercorrere i concetti della meccanica dal corpo rigido al corpo deformabile, passando per la *statica*, la *cinematica* ed i *legami costitutivi,* al fine di poter avere un quadro generale sui modelli e sugli strumenti ad oggi adoperati per studiare e valutare l'affidabilità e, dunque, la sicurezza strutturale.

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
DEFINIZIONE DI CORPO CONTINUO

1

Per **corpo continuo** si intende un sistema materiale per il quale si possono identificare i suoi punti materiali con i punti di una posizione dello spazio continuo occupata dal sistema in un determinato istante.

- Perché è di nostro interesse introdurre la «Meccanica dei continui»?

Dicesi **struttura** un corpo continuo o un insieme di corpi connessi tra loro e opportunamente vincolati, soggetti a forze applicate in punti diversi, in grado di «trasferire» i carichi.

Lo scopo dell'**analisi strutturale** è quello di stabilire se alla struttura è assicurata la funzionalità nel senso più generale.

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
INTRODUZIONE DI UN MODELLO

1

L'obiettivo del nostro incontro è quello di focalizzare l'attenzione sullo studio del **comportamento meccanico** di:

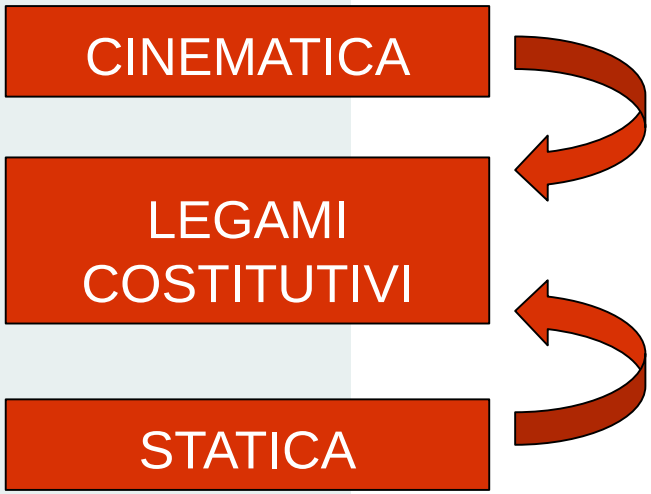
- Materiali
- Strutture
- Costruzioni

La *Meccanica dei continui* deformabili è da sempre considerata come supporto essenziale per la descrizione del **modello** matematico su cui operare per descrivere il comportamento degli elementi strutturali usati nei più svariati settori della tecnica.

L'idea, quindi, è quella di ottenere informazioni sulla struttura utilizzando un modello per quanto possibile semplificato. Ad es. anche se la trave è un corpo solido deformabile, per molti problemi di interesse ingegneristico può essere studiata come corpo rigido.

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
LE EQUAZIONI COSTITUTIVE

1



Cinematica dei corpi deformabili (Analisi della deformazione, **equazioni di congruenza**, il concetto di misura: *le forze e le tensioni sono da intendersi come idealizzazioni, ciò che si misura sono gli spostamenti e gli allungamenti*)
Statica (Analisi della tensione, **equazioni di equilibrio**, nozione di sforzo – *th. di Cauchy-Poisson* – classificazione degli stati tensionali)
Legami costitutivi → <u>Il modello del corpo rigido si arricchisce con l'introduzione delle equazioni costitutive</u>

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

1

La prima idea di deformazione, intesa come variazione relativa invece che assoluta della configurazione dei corpi, fu di Beeckman (1630) e J. Bernoulli (1705) che introdussero la nozione di **misura lineare di deformazione**, intesa come rapporto cioè tra la variazione di lunghezza subita da una fibra materiale e la sua lunghezza originaria.

A partire da questa idea si svilupparono successivamente la teoria delle deformazioni infinitesime o teoria delle piccole deformazioni, il cui modello tridimensionale è dovuto ad Eulero (1750-1770), e la teoria delle deformazioni finite, dovuta essenzialmente alle elaborazioni di Cauchy (1823-1841) ed anche ai contributi di D'Alembert, Green, Stokes, Cosserat ed altri eminenti studiosi.

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

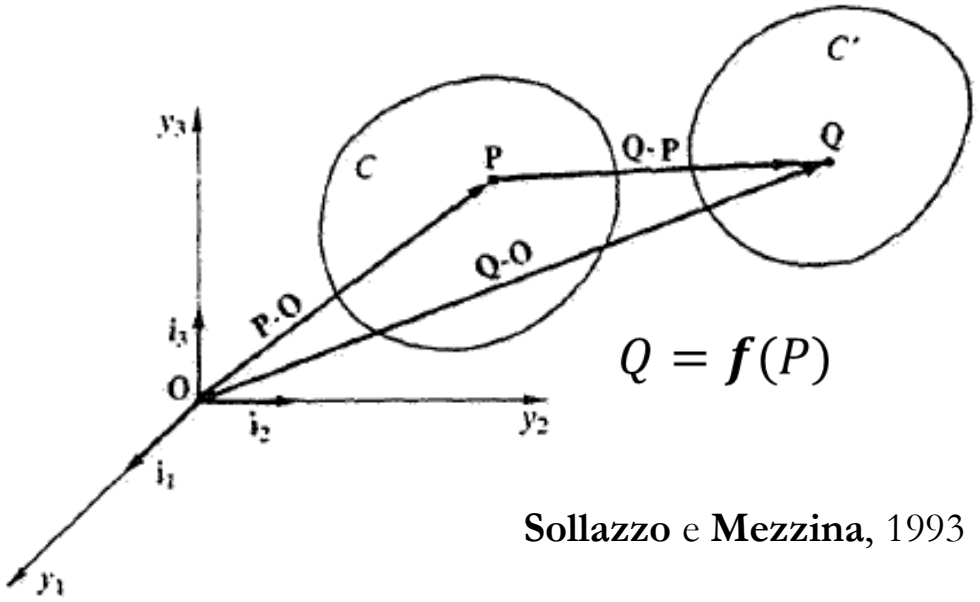
1

La prima di queste teorie, più propriamente chiamata **«teoria lineare della deformazione»**, si può formulare in modo diretto o, altrettanto compiutamente, per deduzione dalla più generale teoria delle deformazioni finite.

Configurazione iniziale o di riferimento → *f* → Configurazione attuale o deformata

La legge *f* prende il nome di «deformazione», si tratta di una funzione vettoriale che rispetta i seguenti principi:

- di impenetrabilità della materia
- di continuità della materia
- di permanenza della materia



Sollazzo e **Mezzina**, 1993

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

1

Definizione del
campo di spostamento

$$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$$

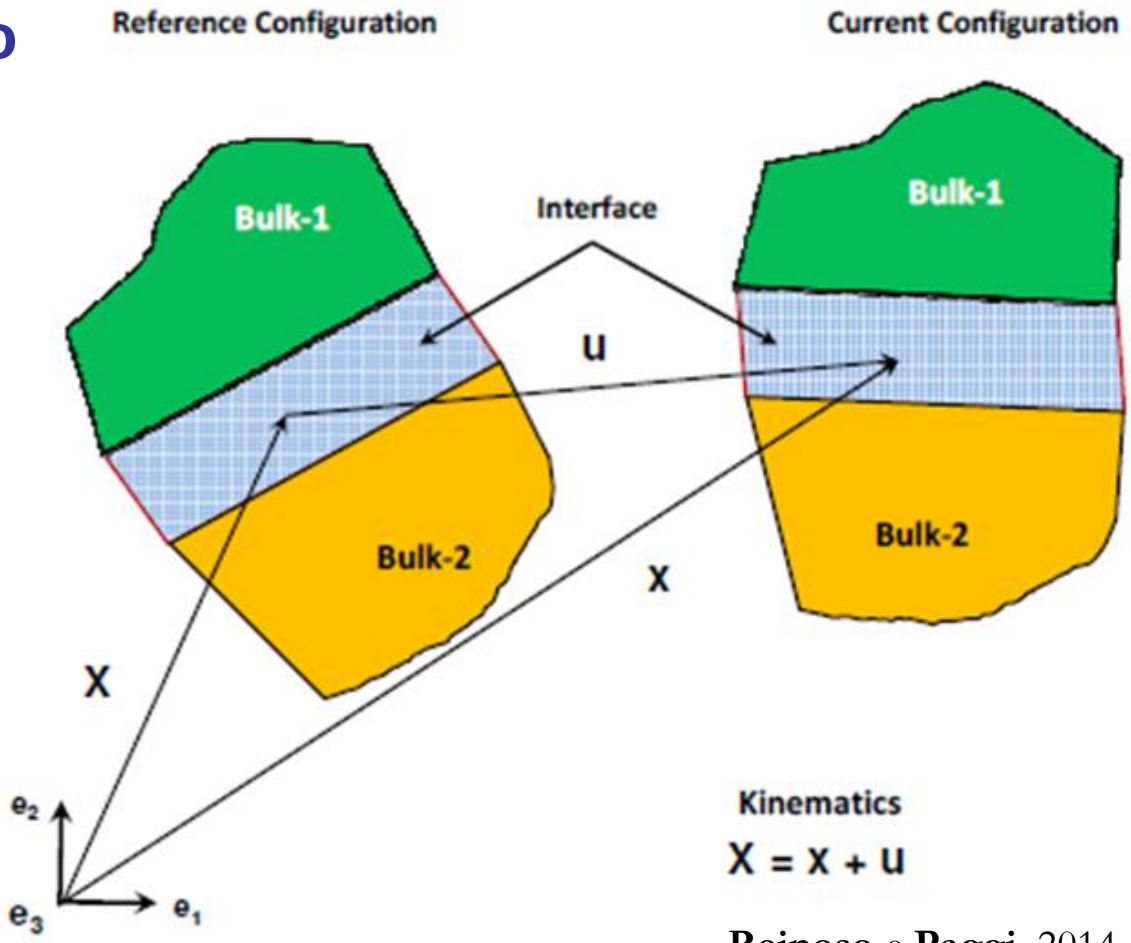
$$\boldsymbol{u}(X) = \boldsymbol{f}(X) - \boldsymbol{X}$$

… e sua variazione nel tempo

$$\mathbf{H} := \nabla \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{f} - \mathbf{I}$$

T. NON LIN $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$ $\xrightarrow[\mathbf{H} \ll 1]{\boldsymbol{u} \ll 1}$ $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ **T. LIN**

IDENTITÀ CINEMATICA FONDAMENTALE



Reinoso e **Paggi**, 2014

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
ANALISI DELLA TENSIONE

1

Nella configurazione corrente relativa alla deformazione/moto, ogni parte arbitraria del corpo *interagisce meccanicamente sia con la sua parte complementare che con l'ambiente in cui il corpo è immerso*. Tali interazioni meccaniche si descrivono con **forze**.

Assunto il corpo continuo in una generica configurazione deformata, si considerino tre classi di forze che presentano certi aspetti comuni e certi altri di distinzione:

(a) forze di volume, esercitate dall'ambiente sui punti interni del corpo;

(b) forze di contatto tra le varie parti in cui il corpo si può pensare idealmente suddiviso;

(c) forze di contatto esterne, anche dette forze di superficie, esercitate su tutta o su porzioni della frontiera del corpo dagli altri corpi costituenti l'ambiente.

INTERAZIONE CORPO-AMBIENTE (a) (c)

→ **«tensione»**

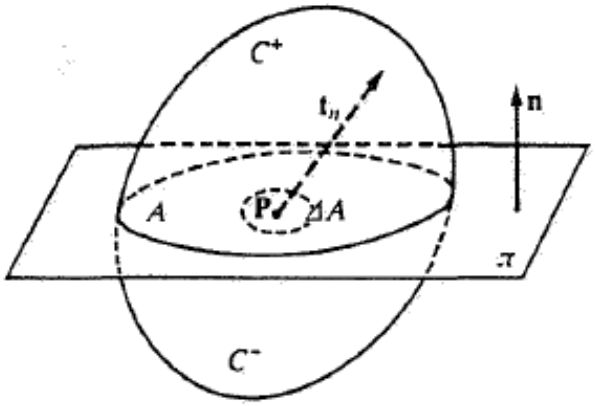
SUPERFICIE DI CONTATTO (b) (c)

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
MODELLO DI EULERO-CAUCHY

1

Le forze di contatto tra le varie parti del corpo si introducono con la nozione di **tensione,** concetto centrale della meccanica dei continui deformabili e dovuto, nella sua formulazione classica, ad Eulero (1750) e Cauchy (1823) che concepirono rispettivamente il principio delle sezioni ed il principio della tensione.

L'azione che attraverso un intorno ΔA di **P** su π la parte C^+ esercita su C^- equivale ad un *campo di forze* definito *su* ΔA. Denotato con $\Delta\mathbf{R}$ il risultante di tale campo di forze, il postulato di Cauchy consiste nel richiedere che la funzione



$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \boldsymbol{t}_n$$

$$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{t}_n(\mathbf{P}, \mathbf{n})$$

Sollazzo e **Mezzina**, 1993

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
MODELLO DI EULERO-CAUCHY

Nel modellare l'azione locale, in quanto il vettore tensione è definito nel punto **P**, e nel considerare che tale azione è dovuta al cimento; ci si ferma a riflettere che la superficie divisoria tra le due parti di *C*, nell'accezione più generale, possa essere *una superficie di interfaccia qualunque*, non necessariamente piana, purché nel punto **P** la normale al piano osculatore sia proprio **n** (la normale al piano π). Attraverso un procedimento variazionale studiato da W. Noll (1960):

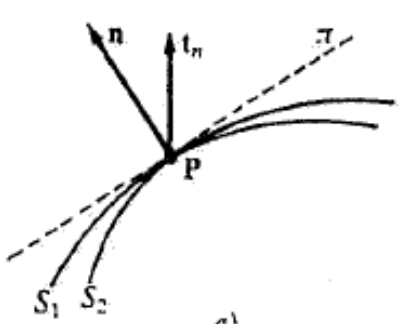
$$\boldsymbol{t}_n = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\, \boldsymbol{t}_n(\mathbf{P}) + (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\, \boldsymbol{t}_n(\mathbf{P})$$

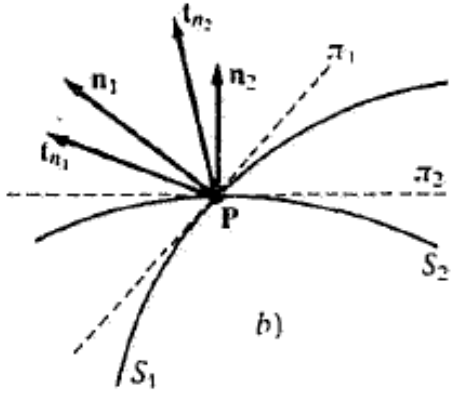
$$(\, \boldsymbol{t}_n(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}\,)\, \mathbf{n} + (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\, \boldsymbol{t}_n(\mathbf{P})$$

σ — TENSIONE NORMALE (TRAZIONE E COMPRESSIONE) $\gtrless 0$

$\boldsymbol{\tau}_n$ — TENSIONE TANGENZIALE

$\tau = |\boldsymbol{\tau}_n|$





Sollazzo e **Mezzina**, 1993

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

1

CORPO RIGIDO È in EQLB $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R} = 0$, $M\,(O) = 0$ — **EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA**

CORPO DEFORMABILE $\mathcal{B}$ È in EQLB $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r}(\mathcal{P}) = 0$, $\boldsymbol{m}(\mathcal{P}) = 0$ $\forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$



Mentre per il corpo rigido le ECS sono CN e CS, per il corpo deformabile sono solo CN di EQLB, ovvero in tal caso dovrò verificare che comunque si scelga una parte $\mathcal{P}$ del corpo $\mathcal{B}$ valgano gli assiomi di Eulero.

TH. 1823 CAUCHY (CN) – 1829 POISSON (CS)

$\boldsymbol{r}(\mathcal{P}) = 0$, $\boldsymbol{m}(\mathcal{P}) = 0$ $\forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$

- $\boxed{\exists\, \mathbf{T}(\mathrm{x})\ \ni'\ \boldsymbol{t}_n(\mathrm{x}) = \mathbf{T}\mathbf{n}}$ $\quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{B}$
- $div\mathbf{T} + \mathrm{b} = 0$ $\quad \ldots(\, \boldsymbol{r}(\mathcal{P}) = 0\,)$ $\quad \forall\, \mathrm{x} \in \dot{\mathcal{B}}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ $\quad \ldots(\, \boldsymbol{m}(\mathcal{P}) = 0\,)$ $\forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{B}$

ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
COMPONENTI DI TENSIONE

1

Se sono noti i vettor tensione rispetto a $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ è noto il vettor tensione in una qualsiasi direzione.
Si può così «costruire» la matrice associata al tensore degli sforzi:

$$\mathbf{T}(x) \ni' \ \boldsymbol{t}_n(x) = \mathbf{T}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \boldsymbol{t}_{\hat{e}_j} \cdot \hat{e}_i$$

$$\boldsymbol{t}_n(x) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}_{\hat{e}_i}(x)\boldsymbol{n}_i = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}_{\hat{e}_i}(\hat{e}_i \cdot \boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{3} (\boldsymbol{t}_{\hat{e}_i} \otimes \hat{e}_i)\boldsymbol{n}$$

- $i = j \rightarrow \sigma$ T. N.
- $i \neq j \rightarrow \tau$ T. T.

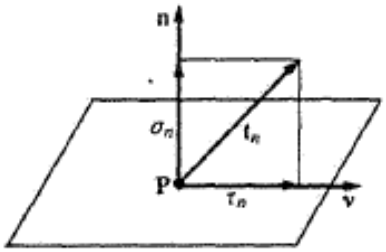
$$\begin{Bmatrix} (t_n)_1 \\ (t_n)_2 \\ (t_n)_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_{\hat{e}_1})_1 & (t_{\hat{e}_2})_1 & (t_{\hat{e}_3})_1 \\ (t_{\hat{e}_1})_2 & (t_{\hat{e}_2})_2 & (t_{\hat{e}_3})_2 \\ (t_{\hat{e}_1})_3 & (t_{\hat{e}_2})_3 & (t_{\hat{e}_3})_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_1)_1 & (t_2)_1 & (t_3)_1 \\ (t_1)_2 & (t_2)_2 & (t_3)_2 \\ (t_1)_3 & (t_2)_3 & (t_3)_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{t}_n$ $\quad$ $\mathbf{T}$ $\quad$ $\boldsymbol{n}$

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = (\boldsymbol{t}_n)_n = (\mathbf{T}\,\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$$

$$\tau_n = (\boldsymbol{t}_n)_v = (\mathbf{T}\,\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}$$



ELEMENTI DI MECCANICA DEI CONTINUI
LE EQUAZIONI COSTITUTIVE

1

La teoria che interpreta le differenze fisiche esistenti fra i vari materiali di cui i corpi si possono pensare costituiti, dicesi **teoria delle relazioni costitutive**. Una relazione costitutiva corrisponde usualmente ad una limitazione dello stato deformativo o di tensione, oppure di entrambi. Es:

$\mathcal{B}$ è linearmente elastico $\Leftrightarrow$ $\mathbf{T}(\mathrm{x}) = \underbrace{\mathbb{C}(\mathrm{x})}_{\text{TENSORE ELASTICO}}\, \mathbf{E}(x)$ $\qquad$ $\underbrace{\varphi}_{\text{EN. DI DEFORMAZIONE}} = \frac{1}{2}\mathbf{T}(\mathrm{x}) \cdot \mathbf{E}(x)$

Si tratta di una generalizzazione della Legge di Hooke. Il valore attuale dello sforzo nella configurazione deformata che in teoria lineare confondiamo con la configurazione di riferimento, dipende linearmente ed esclusivamente dal valore attuale della deformazione.

Il tensore elastico del IV ordine è costituito da 36 componenti, noti anche come **moduli elastici o coefficienti elastici**. Se il tensore elastico è lo stesso in ogni punto il materiale si dice **omogeneo**. Se il tensore è simmetrico, dunque le componenti si riducono a 21, si parla di **materiali di Green o materiali iperelastici**, per tali materiali è possibile definire l'energia di deformazione φ. Una restrizione ancora più spinta è quella dei materiali **isotropi**, in tal caso le componenti si riducono a 2!

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
INTRODUZIONE

Uno degli aspetti fenomenologicamente più evidenti del comportamento meccanico dei materiali è che essi posseggono una **resistenza limitata**: *sottoponendo un campione a sollecitazioni via via crescenti, ad un certo punto viene attinto il limite di resistenza del materiale, ed il campione si rompe*.

La resistenza è una delle proprietà essenziali per valutare un materiale da costruzione.

In funzione della resistenza è possibile procedere al **dimensionamento** delle membrature rispetto alle sollecitazioni previste in esercizio: ciò avviene avvalendosi delle **VERIFICHE DI RESISTENZA**, che consistono nel confronto fra parametri rappresentativi dello stato di sollecitazione e parametri rappresentativi della resistenza. È inoltre possibile richiedere che la capacità resistente sia opportunamente superiore alle azioni sollecitanti, in modo tale da assicurare la sicurezza della costruzione; si parla in tal caso di **VERIFICHE DI SICUREZZA**.

Il progresso delle tecniche di costruzione è avvenuto parallelamente all'avanzamento delle conoscenze in merito alla resistenza dei materiali, oltre che allo sviluppo di tecniche per la previsione dello stato di sollecitazione in funzione dei carichi agenti (**analisi strutturale**).

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
INTRODUZIONE

2

Dall'approccio tipicamente empirico degli antichi si è gradualmente passati ad impostazioni sempre più raffinate; tuttavia ancora oggi non è disponibile una teoria generale che consenta di descrivere matematicamente le condizioni di resistenza dei materiali. Si impiegano infatti relazioni basate su congetture la cui validazione è legata essenzialmente all'accordo mostrato con i **dati sperimentali**. Innanzitutto è necessario riconoscere che la **resistenza non è una proprietà "assoluta"**: **più correttamente si deve parlare di resistenza nei confronti di un certo tipo di sollecitazione ed in certe condizioni**.

Molti sono infatti i parametri che intervengono a determinare la crisi del materiale. I più importanti sono:

- *lo stato di tensione;*
- *lo stato di deformazione;*
- *la velocità di variazione dello stato di tensione e/o dello stato di deformazione;*
- *la temperatura;*
- *l' invecchiamento del materiale;*
- *la storia passata dei carichi e/o delle deformazioni.*

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
INTRODUZIONE

Per un certo materiale ed a parità di altre condizioni si può verificare che:

- **la resistenza sotto sollecitazioni di prevalente compressione è differente da quella esibita sotto sollecitazioni di prevalente trazione**;
- la resistenza sotto carichi statici (ossia variabili lentamente) è differente da quella sotto carichi dinamici, o al limite di tipo impulsivo (urti);
- **la resistenza cambia a seconda della temperatura**; la temperatura può cambiare anche il modo con cui il materiale arriva alla rottura;
- **con il tempo la struttura del materiale subisce modificazioni, che si riflettono sull'entità ed il tipo delle massime sollecitazioni sopportabili** (*ageing*);
- la resistenza può cambiare a seconda che il materiale abbia subito nel tempo carichi molto elevati o meno, ed inoltre è differente a seconda che i carichi abbiano carattere **monotonico** o **ciclico**; inoltre un materiale sottoposto ad un notevole numero di cicli di carico può subire una rottura improvvisa, di carattere **fragile**, sotto l'azione di carichi anche molto più bassi di quelli che rappresentano la resistenza a sollecitazioni applicate in modo monotonico (**fatica**);
- influenza da fenomeni di tipo chimico o elettromagnetico/ umidità / processi di costruzione

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
LE PROVE SPERIMENTALI

2

PROVE DISTRUTTIVE: PROVE MECCANICHE TRADIZIONALI

PROVE STATICHE →

- **PROVE DI TRAZIONE**
- **PROVE DI COMPRESSIONE**
- **PROVE DI TAGLIO**
- **PROVE DI FLESSIONE**
- **PROVE DI TORSIONE**

↓

L'applicazione di carichi statici può essere di breve durata (pochi minuti), come nelle prove di trazione per la misura di resistenza e rigidezza, o può essere prolungata per settimane e mesi, come nei test di resistenza a scorrimento viscoso.

PROVE CICLICHE →

Misura della **resistenza alla degradazione e alla rottura a causa di carichi variabili nel tempo.**
Frequenza di applicazione del carico generalmente bassa per evitare un eccessivo riscaldamento: **5 Hz e 10 Hz.**
I carichi ciclici sono ad ampiezza costante o secondo spettri di carico rappresentativi delle reali condizioni operative di una particolare struttura.

PROVE DINAMICHE →

Misura della **capacità di resistenza del materiale all'impatto e alla penetrazione.**

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
MACCHINE DI PROVA

2

Le macchine di prova introducono il carico nei provini per poter ottenere le proprietà di resistenza e di rigidezza del materiale in esame. Indipendentemente dal metodo di applicazione delle forze, questi apparecchi mettono in movimento, ad una velocità controllata, un supporto meccanico che pone il campione in trazione o in compressione.

Universal Testing Machine (UTM): prove a trazione, compressione, prove a flessione; prove carico statico e prove a carico ciclico.

1) **Servohydraulic machine (sistema di prova idraulico)** → ideali per prove di forza da bassa a media (plastiche, gomme e biomateriali); prove di trazione, compressione, flessione e taglio nei laboratori di ricerca e controllo qualità;
2) **Gear-driven machine (sistema di prova elettromeccanico)** → ideali per prove pesanti con forze superiori a 300 kN fino a 1000 kN o più; acciaio strutturale, componenti aerospaziali e materiali per l'ingegneria civile; test di durabilità a lungo termine in cui vengono applicati carichi elevati per periodi prolungati.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
SISTEMI DI CONTROLLO

2

I circuiti elettronici e i servo-meccanismi rilevano e controllano continuamente i parametri chiave del test, ossia il carico, le deformazioni del provino e la posizione del blocco mobile della macchina. L'importanza di queste grandezze deriva dal fatto che la loro analisi fornisce i valori delle proprietà meccaniche di interesse.

Le prove sperimentali possono essere condotte con le modalità seguenti:

1) **Prova in controllo di forza**
2) **Prova in controllo di spostamento**
3) **Prova in controllo di deformazione**

La **deformazione** del provino può essere determinata in vari modi, in funzione delle dimensioni del campione, delle condizioni ambientali e dei requisiti di accuratezza e di precisione. Uno dei metodi più semplici fa uso della velocità istantanea della traversa di carico e dell'andamento temporale di applicazione della forza. Per ogni coppia di dati, si possono così calcolare la tensione e la deformazione a cui è soggetto il provino.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
SISTEMI DI MISURA DELLE DEF.

2

Tuttavia, supponendo che lo spostamento della cella di carico sia uguale a quello del campione, si commette un errore dovuto al fatto che il telaio della macchina non possiede rigidezza infinita e quindi si deforma sotto carico.

Si ricorre quindi a sistemi di misura più adattabili ed accurati.

L'allungamento del provino durante la prova può essere misurato direttamente per mezzo di dispositivi di vario tipo. I più noti sono gli **estensimetri a clip**, gli **estensimetri resistivi** e gli **apparati ottici**. Sono disponibili in commercio anche strumentazioni più avanzate, quali gli **interferometri laser** e i **video-estensimetri**.





Estensimetri



Cella di carico

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
LE PROVE SPERIMENTALI

2

PROVE NON DUSTRUTTIVE

PROVE ULTRASONICHE

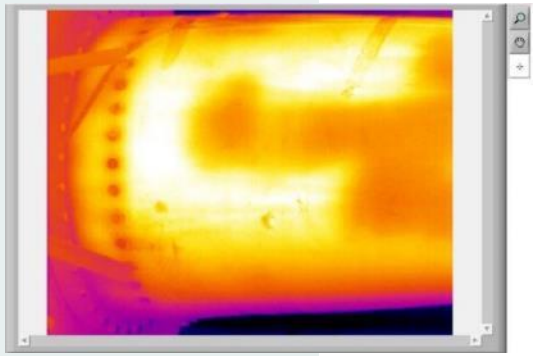
EMISSIONE ACUSTICA

PROVE TERMOGRAFICHE

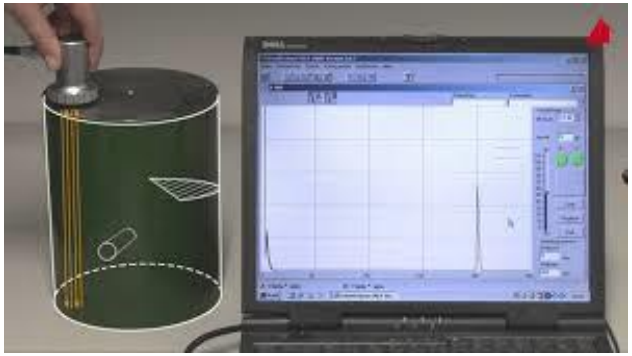
RAGGI X

…

1) caratterizzazione meccanica del materiale;
2) valutazione dello stato di danneggiamento;
3) identificazione dei difetti in fase di produzione e in fase di esercizio.



Prova termografica



Prova ultrasonica



Scanner automatico usato per l'ispezione di torri/pale eoliche

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Tralasciando la disamina sugli effetti della resistenza di cause di tipo non meccanico (fenomeni termici, chimici, elettromagnetici, invecchiamento …) ed i fenomeni di crisi del materiale sotto carichi ripetuti (fatica) – quali semplificazioni spesso adottate in campo applicativo – la definizione della **capacità resistente** di un materiale continua ad essere un concetto per nulla banale.

La determinazione sperimentale della resistenza dei materiali avviene per mezzo di **prove convenzionali**, standardizzate da apposite **normative** (cfr. *cap. 11* D.M. 17.01.2018 «Norme tecniche di costruzione»).

Evidentemente prove come quelle citate non permettono di rilevare il comportamento del materiale al livello puntuale, bensì la **risposta strutturale** del campione che costituisce il provino.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Tuttavia, coerentemente con le ipotesi alla base della descrizione al continuo del comportamento dei materiali, è possibile ritenere che **la risposta del campione sia rappresentativa della risposta puntuale media a patto che le sue dimensioni siano sufficientemente grandi rispetto a quelle dei costituenti elementari del materiale**. In altre parole il campione deve avere dimensioni almeno pari a quelle del ***volume rappresentativo***, in genere identificato con un cubo avente il lato pari ad almeno 10 volte le dimensioni della massima disomogeneità del materiale.

Si immagini dunque di sottoporre campioni di diversi materiali ad una stessa prova, ad esempio di **trazione monoassiale**, con carico crescente monotonicamente. Una prima evidente osservazione è che non tutti i materiali raggiungono la rottura allo stesso modo; schematicamente è possibile distinguere in:

- ***comportamento fragile;***
- ***comportamento duttile.***

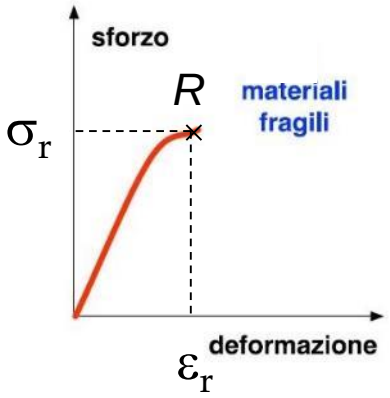
Nella successiva slide si mostrano diagrammi teorici di tensione-deformazione a seguito di prova di trazione monoassiale, nei quali sono indicate le condizioni di rottura $(\sigma_r, \varepsilon_r)$ *e, nel caso del materiale duttile, anche quelle di snervamento* $(\sigma_s, \varepsilon_s)$.

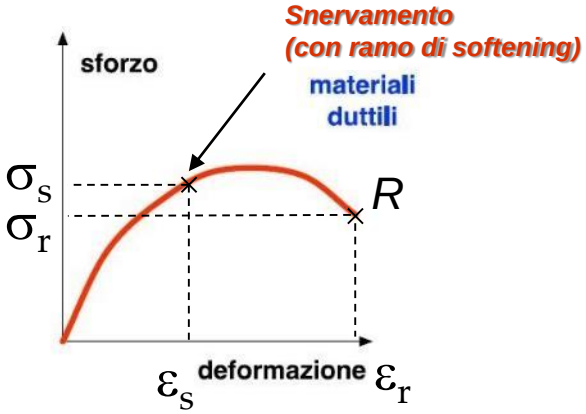
IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Si parla di **comportamento fragile** quando il materiale si rompe dopo aver subito deformazioni relativamente piccole, ed al termine di una fase in cui il comportamento è approssimativamente elastico (ossia caratterizzato dalla reversibilità della deformazione); ciò avviene ad esempio per i **materiali lapidei, naturali o artificiali**, per i laterizi e per il vetro, ma può accadere anche per i metalli, specie a bassa temperatura.

Si parla di **comportamento duttile** quando il materiale si rompe per deformazioni relativamente grandi, e possiede un campo plastico ben definito, seguente la fase iniziale di tipo elastico, nel quale la deformazione è parzialmente irreversibile, e nel quale la risposta meccanica è sensibilmente meno rigida; il passaggio dal campo elastico al campo plastico è detto **snervamento**. Materiali che esibiscono un comportamento duttile sono ad esempio i **metalli, i materiali plastici e le terre**.





IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

A livello microscopico sia la rottura dei materiali fragili che lo snervamento dei materiali duttili comportano una modifica permanente della struttura del materiale.

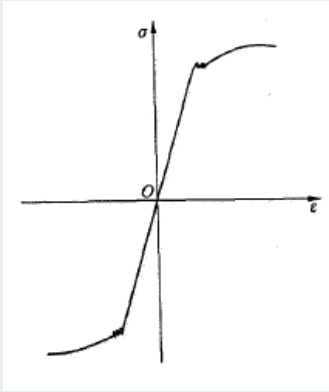
Nel primo caso (**materiali fragili**) avviene una vera e propria **decoesione** dei costituenti del materiale (**frattura**), che si verifica quando a livello locale l'energia di deformazione, dovuta ai carichi applicati, eguaglia l'energia necessaria a separare gli strati di atomi, molecole o granuli lungo una certa superficie. Per i **materiali duttili** l'ingresso in fase plastica (**snervamento**) è accompagnato da trasformazioni quali scorrimenti reciproci dei costituenti elementari, spostamento di dislocazioni e comparsa di nuove dislocazioni ecc.; quindi, a grandi deformazioni, interviene la rottura per decoesione.

L'intervento della rottura rende ovviamente il materiale non idoneo a sopportare ulteriori sforzi; in generale lo snervamento non preclude invece ulteriori risorse di resistenza, anche se - in vista di applicazioni strutturali - è necessario valutare se le elevate deformazioni che si producono siano compatibili con la funzionalità della costruzione; pertanto spesso (come avviene ad esempio con gli acciai da costruzione) si assume lo snervamento come condizione di crisi dei materiali duttili.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Si immagini ora di sottoporre campioni degli stessi materiali esaminati in precedenza ad una prova di **compressione monoassiale**; i provini abbiano forma sufficientemente tozza, in modo da poter escludere fenomeni di instabilità a compressione. Confrontando con i risultati delle prove a trazione, si osserva che per alcuni materiali, come ad esempio l'**acciaio**, il **limite di resistenza a compressione è praticamente uguale a quello a trazione** *(Fig. a)*, mentre per altri, come il **calcestruzzo** o i **materiali lapidei**, la **resistenza a compressione σ_c risulta molto superiore a quella esibita a trazione σ_t** *(Fig. b).*



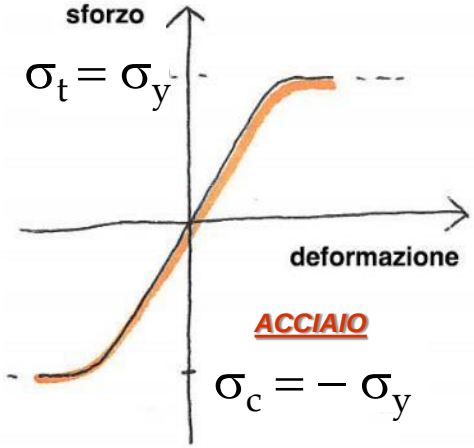


Figura a)

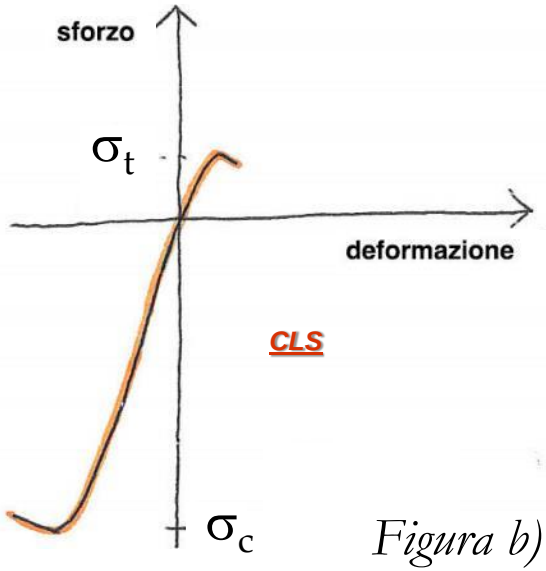
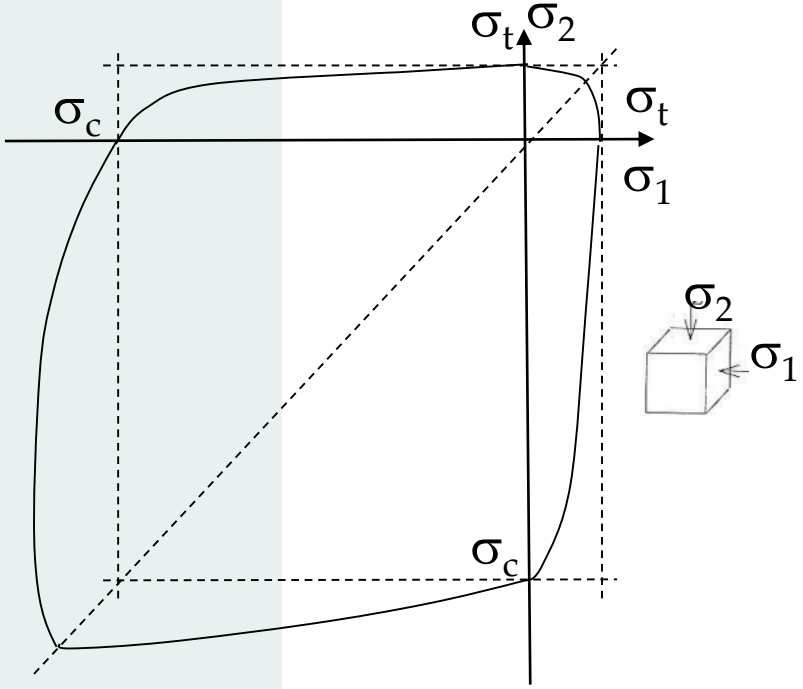


Figura b)

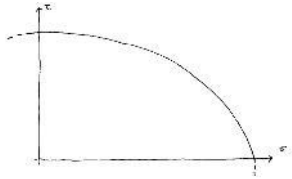
IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

Le **prove monoassiali**, pur consentendo di identificare il carattere del comportamento del materiale, forniscono tuttavia informazioni molto parziali sulla resistenza per stati di tensione generici. **È infatti sperimentalmente evidente che in tal caso la rottura o lo snervamento dipendono da come si combinano le varie componenti di tensione.**



Ad esempio sottoponendo dei campioni cilindrici cavi di metallo a prove di contemporanea trazione e torsione, fino allo snervamento (esperimento di Taylor e Quinney), e diagrammando i risultati di prova in un piano (σ, τ), si ottiene una curva, che permette chiaramente di comprendere la mutua influenza delle due componenti di tensione ai fini dello snervamento.

Piano sigma-tau



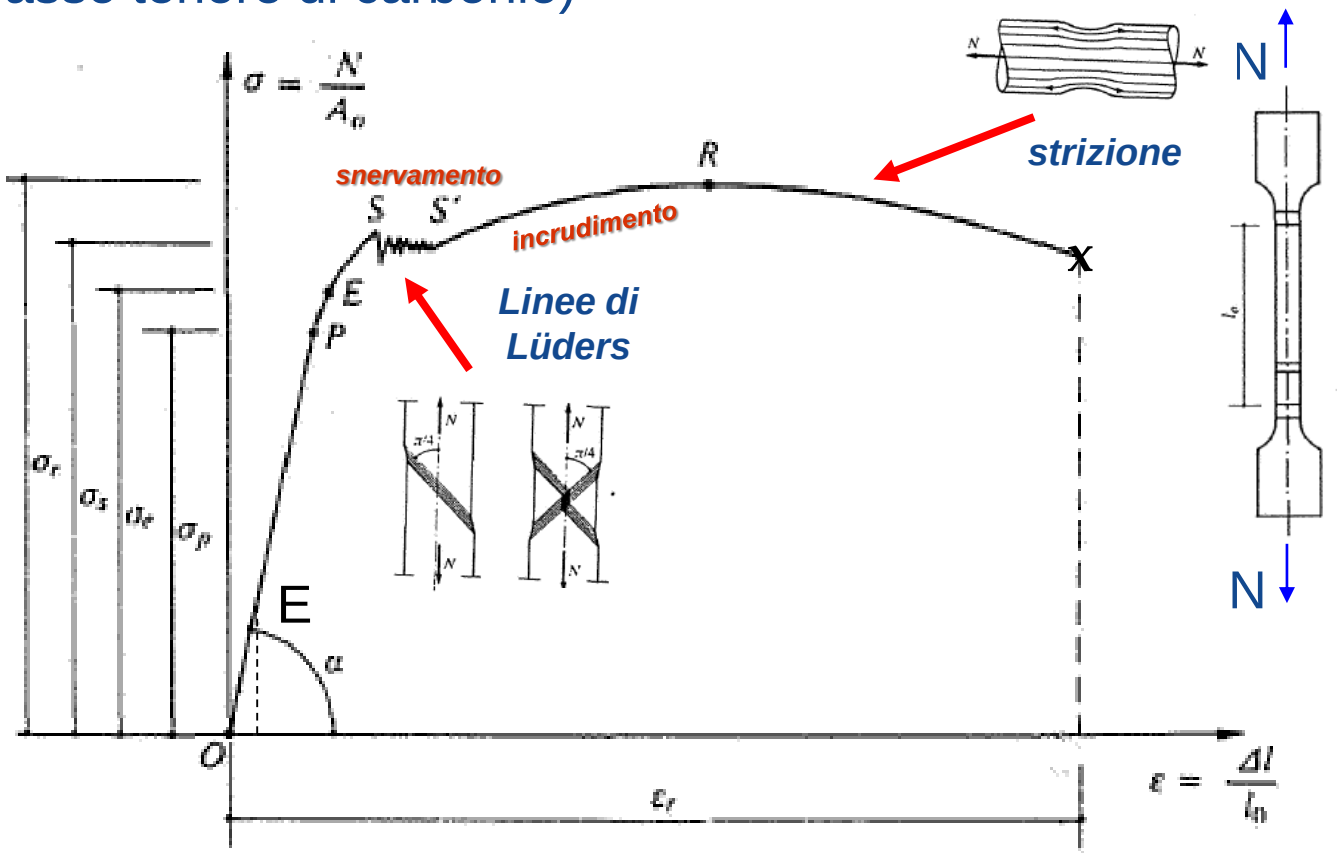
Il seguente diagramma, riportato anche da alcune normative, mostra invece la mutua influenza fra le tensioni principali σ_1 e σ_2 sulla rottura di un campione di calcestruzzo sottoposto ad uno stato di sollecitazione biassiale.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Per i **materiali duttili** è inoltre necessario approfondire le caratteristiche del comportamento meccanico dopo lo snervamento. A tal fine ci serviremo del diagramma desumibile da una **PROVA A TRAZIONE DI UN ACCIAIO DA CARPENTERIA** (a basso tenore di carbonio)

σ_P: tensione limite di proporzionalità
E: modulo di Young (m. di elasticità longitudinale), tanα
σ_E: tensione limite di elasticità
σ_S: tensione di snervamento
σ_R: tensione di rottura convenzionale (t. max)



E = 205000 MPa

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Dunque la deformazione plastica accumulata ha mutato le condizioni di crisi del materiale: per **incrudimento** si intende proprio la **variazione delle condizioni di snervamento con il procedere delle deformazioni plastiche**; il fenomeno mostra che il materiale ha memoria della storia delle (sole) deformazioni plastiche. Si osserva infine che allo snervamento compaiono sulla superficie del provino due famiglie di linee inclinate all'incirca di ± 45° rispetto all' asse (**linee di Lüders**):

Poiché in uno stato di tensione monoassiale la tensione tangenziale massima agisce su piani inclinati proprio di ± 45° rispetto alla tensione normale, tale evidenza sperimentale spinge ad ipotizzare che la **crisi sia dovuta al raggiungimento di un valore limite della tensione tangenziale**.

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Il diagramma illustrato, di cui qui se ne riporta uno sperimentale, è tipico degli acciai dotati di una fase di snervamento rilevabile (acciai da carpenteria); altri acciai, come ad esempio quelli adoperati per le armature nel cemento armato precompresso, presentano un diagramma tensioni-deformazioni del tipo *Fig. b* con deformazione gradualmente crescente fino a rottura e con uno snervamento quasi per niente rilevabile.

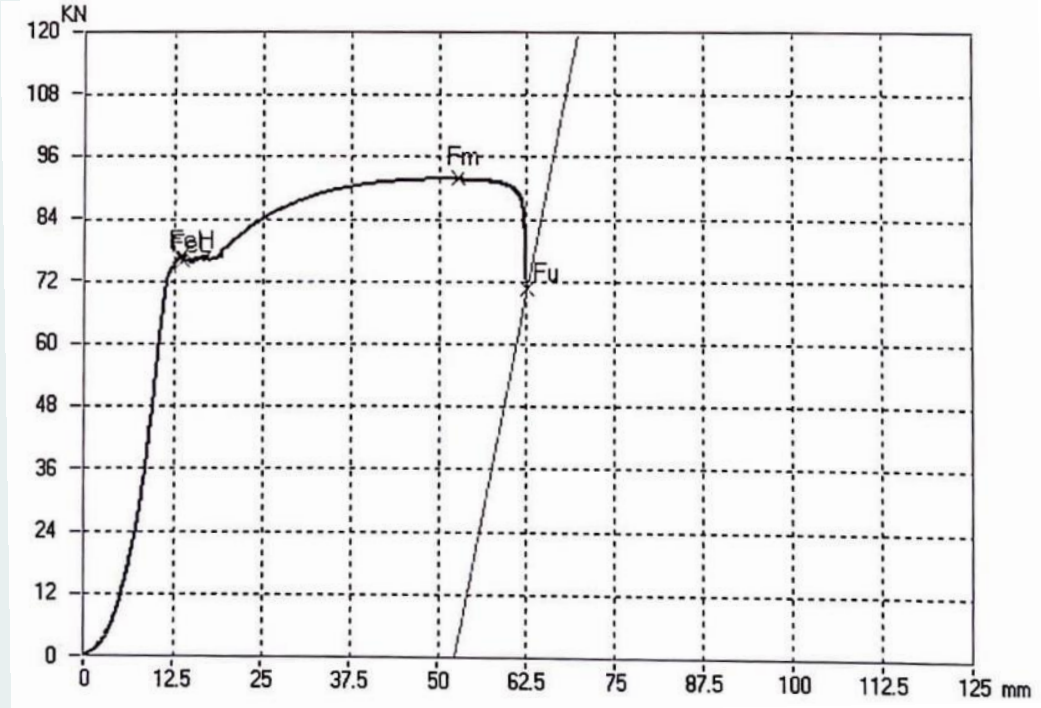


Figura a) diagramma sperimentale acciaio da carpenteria

ACCIAIO ARMONICO:

- stesso modulo E dell'acciaio da carpenteria;
- snervamento non nettamente rilevabile;
- modeste deformazioni permanenti a rottura



Tensione di snervamento convenzionale, corrispondente ad esempio a quella che produce una deformazione residua dello 0,2% della base di misura.

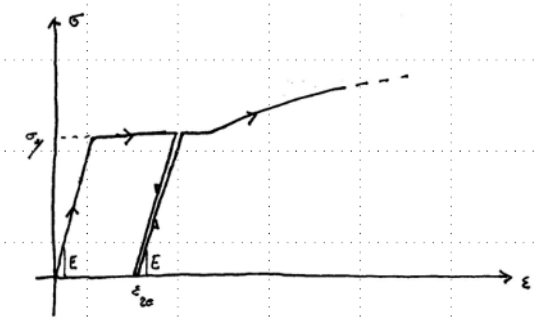
Figura b) diagramma acciaio armonico

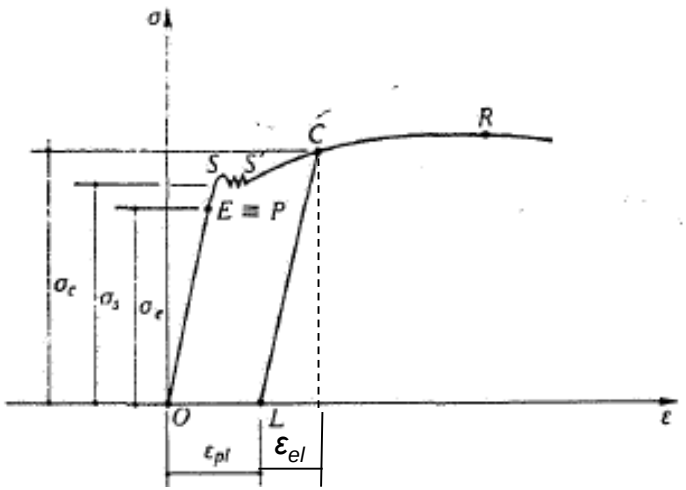
IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Nella **fase elastica la deformazione risulta reversibile**, **mentre a partire dallo snervamento il materiale inizia ad accumulare deformazioni plastiche, irreversibili**: rimuovendo il carico rientra solo una parte della deformazione (quella elastica), mentre l'aliquota plastica rimane come deformazione residua ε_{re}; lo scarico avviene elasticamente, con legge analoga a quella seguita nella fase elastica lineare di carico.

Se lo scarico avviene nel **plateau di snervamento**, al successivo ricarico lo snervamento interviene quando viene nuovamente raggiunta una tensione pari a σ_S; se invece lo scarico avviene nel **tratto di incrudimento**, al successivo ricarico il materiale rimane elastico per un range di tensione più ampio rispetto a quello relativo al materiale "vergine": lo snervamento avviene infatti solo raggiunta una tensione, maggiore di σ_S, pari a quella raggiunta nella fase di carico precedente.

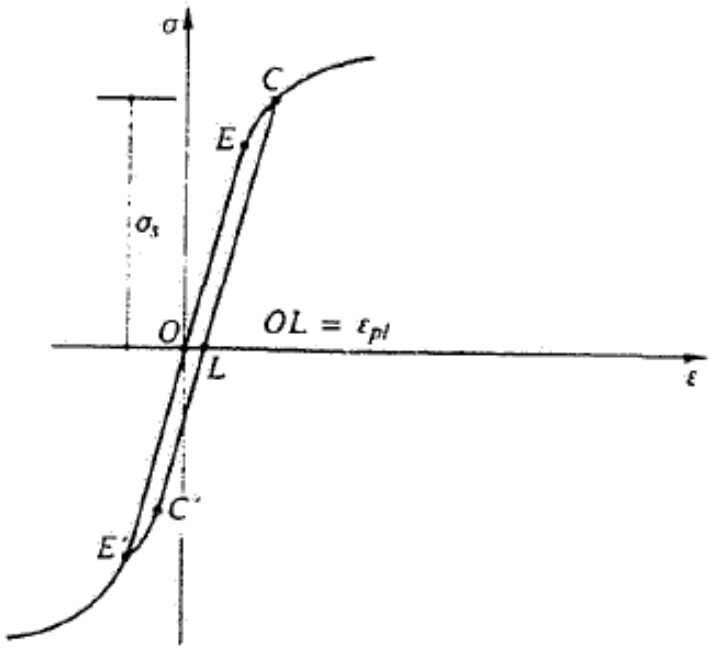




IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Se peraltro, a partire da tale situazione, si procedesse ad un nuovo incremento del carico, il diagramma ripercorrerebbe il tratto LC tornando poi ad identificarsi con il tratto CR del diagramma di primo carico. Questo fenomeno, che va sotto il nome di **effetto Bauschinger**, determina cioè un innalzamento del limite di elasticità in trazione da σ_e a σ_c. In merito vi è da osservare tuttavia che, ad un elevarsi del limite elastico in trazione, corrisponde un abbassamento di quello in compressione, ferma restando l'ampiezza dell'intervallo tra - σ_e + σ_e (fase elastica originaria).

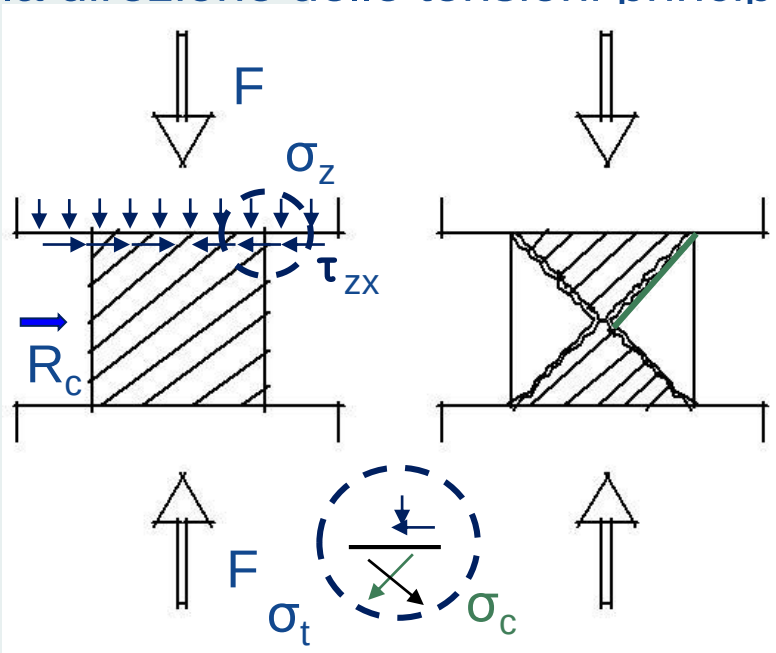


A tal proposito è particolarmente indicativo tale diagramma in cui si è supposto un uguale comportamento a trazione e a compressione e che il tratto EE' trasli in CC'. L'effetto Bauschinger viene utilizzato per determinare la tensione convenzionale di snervamento (il cosiddetto limite dello 0,2%). Si fissa infatti sull'asse delle ascisse il valore della deformazione convenzionale ε_{pl} *prestabilita, rappresentandola in scala mediante il segmento OL e si individua sul diagramma, tramite una retta parallela al tratto rettilineo passante per l'origine, il punto C di intersezione. L'ordinata* σ_c *di quest'ultimo rappresenta la tensione convenzionale in corrispondenza della quale la deformazione permanente è appunto pari al valore prefissato.*

IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

2

Anche la rottura dei materiali fragili avviene secondo modalità che spingono ad attribuire alla tensione tangenziale la responsabilità della crisi. Ad esempio **sottoponendo a compressione un provino di calcestruzzo, esso si rompe mediante scorrimenti lungo piani inclinati**, e non secondo piani ortogonali alla direzione delle tensioni principali:





Il fenomeno si spiega ipotizzando che la **rottura avvenga secondo un meccanismo di tipo attritivo**; anche in tal caso è la tensione tangenziale a giocare un ruolo fondamentale.

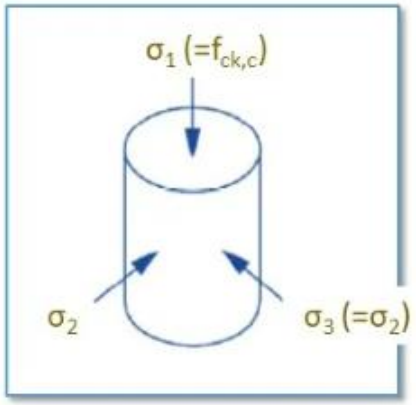
IL COMPORTAMENTO DEI MATERIALI
OSS. SPERIMENTALI SULLA RESISTENZA

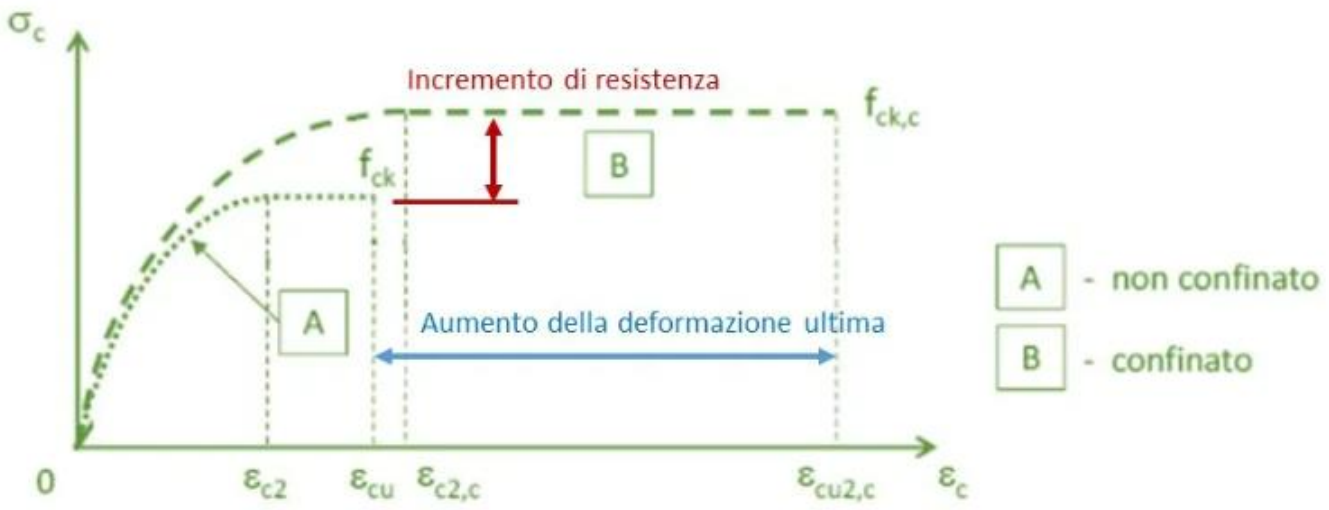
2

La resistenza che esibisce il provino cubico ha un valore maggiore rispetto a quello che si legge nel grafico, perché nella realtà c'è l'**effetto del confinamento**, cioè la presenza di una tensione trasversale che aumenta la resistenza a compressione del materiale.

L'effetto cerchiante delle forze di attrito τ_{zx} aumenta la resistenza.

$$f_{ck} = 0{,}83\, R_{ck}$$



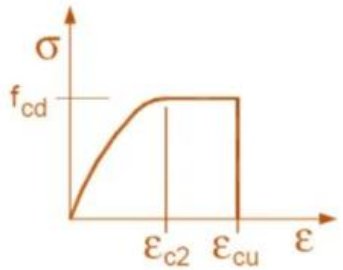


I MODELLI PROPOSTI DALLE NTC: LEGAMI COSTITUTIVI CLS E ACCIAIO

2

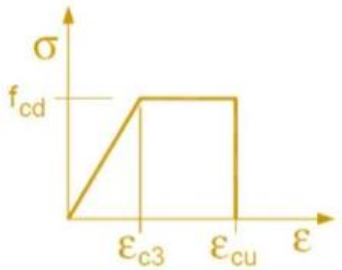
Modelli del legame costitutivo del calcestruzzo

Parabola - rettangolo



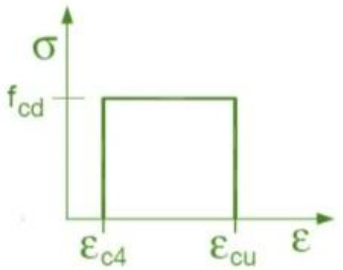
(a)

Triangolo - rettangolo



(b)

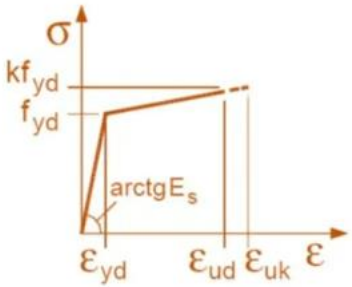
Stress - block



(c)

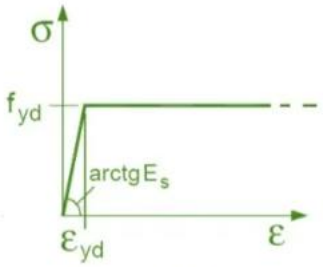
Modelli del legame costitutivo dell'acciaio

Bilineare finito con incrudimento



(a)

Elastico perfettamente plastico indefinito



(b)

I CRITERI DI RESISTENZA
LE TENSIONI LIMITE

3

Per i materiali da costruzione è importante, ai fini della progettazione strutturale, fare in modo che **le tensioni di esercizio non portino il materiale oltre il campo elastico-lineare**, in modo che le deformazioni subite siano reversibili, e che si possano applicare le relazioni elastico lineari trattate. Abbiamo visto che mediante prove monoassiali è possibile definire un **carico limite di proporzionalità in trazione P^t_p** e un **carico limite di proporzionalità in compressione P^c_p**. Tali due carichi sono uguali in modulo per materiali ugualmente resistenti a trazione e compressione, altrimenti assumono valore differente. Il problema è che risulta molto difficile individuare esattamente, dai diagrammi di prova, il limite di proporzionalità; pertanto convenzionalmente si determinano dei **carichi limite** in trazione e compressione P^t_L e P^c_L quali opportune frazioni del carico di snervamento e del carico di rottura (rispettivamente per materiali duttili e per materiali fragili).

$$\sigma^t_L = \frac{P^t_L}{A}$$

tensione limite di resistenza convenzionale a trazione

$$\sigma^c_L = \frac{P^c_L}{A}$$

tensione limite di resistenza convenzionale a compressione

I CRITERI DI RESISTENZA
LA VERIFICA DI RESISTENZA

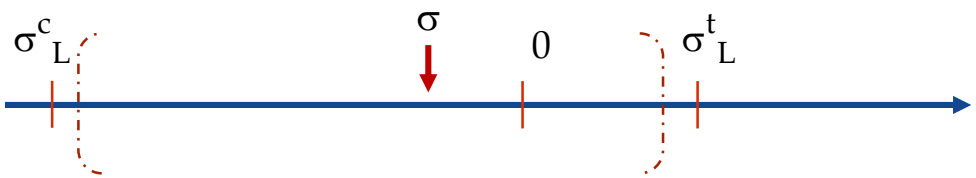
Tali resistenze convenzionali di progetto sono differenti dalle effettive tensioni massime sopportabili dal materiale.

Nella **verifica e nel progetto delle strutture** soggette a stati di tensione monoassiali, è possibile fare direttamente riferimento a tali tensioni limite: infatti detta σ la tensione di esercizio, è sufficiente verificare che

verifica di resistenza

$$\begin{cases} \sigma \le \sigma^{t}_{L} \\ \sigma \ge \sigma^{c}_{L} \end{cases}$$

Graficamente, la **verifica di resistenza** richiede che il punto rappresentativo dello stato di tensione di esercizio sia interno al segmento avente per estremi le due tensioni limite:



I CRITERI DI RESISTENZA
LE TENSIONI AMMISSIBILI

3

In realtà la verifica e il progetto delle strutture sono affette da una serie di incertezze: sulla resistenza dei materiali, sulle approssimazioni del modello strutturale, sulla geometria, sull'entità dei carichi, ecc.. Inoltre, è bene cautelarsi da eventuali errori di calcolo e/o di esecuzione, e far sì che eventi eccezionali e imprevisti non inducano il collasso della costruzione. Sono state sviluppate apposite teorie per affrontare razionalmente tale argomento: le teorie della **sicurezza strutturale**. Attualmente le norme tecniche italiane (NTC 2018) ed europee (Eurocodici) si basano sul cosiddetto **metodo semiprobabilistico agli stati limite**. Le norme tecniche fino a qualche anno fa (tuttora utilizzabile per casi molto semplici) adoperavano il **metodo delle tensioni ammissibili**. Con questo approccio, tutte le incertezze e approssimazioni sono rappresentate da un coefficiente riduttivo della resistenza detto **coefficiente di sicurezza** ν.

$$\begin{cases} \sigma^t_{adm} = \dfrac{\sigma^t_L}{\nu} \\ \sigma^c_{adm} = \dfrac{\sigma^c_L}{\nu} \end{cases}$$

tensione ammissibile a trazione

tensione ammissibile a compressione

I CRITERI DI RESISTENZA
LA VERIFICA DI SICUREZZA

3

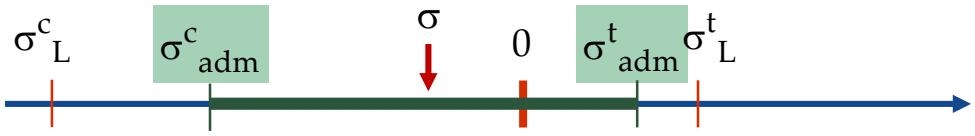
Il valore del coefficiente di sicurezza dipende essenzialmente dalla tecnica costruttiva utilizzata (→ materiale da costruzione) e dalle incertezze ad essa associata, sia relativamente alla resistenza del materiale che all'esecuzione della costruzione.

Valori tipici sono: ν =1,7÷1,8 acciaio, ν =2,5÷3 cls, ν =4÷10 murature

Sostituendo alle tensioni limite le tensioni ammissibili, si passa dalla verifica di resistenza alla **verifica di sicurezza**:

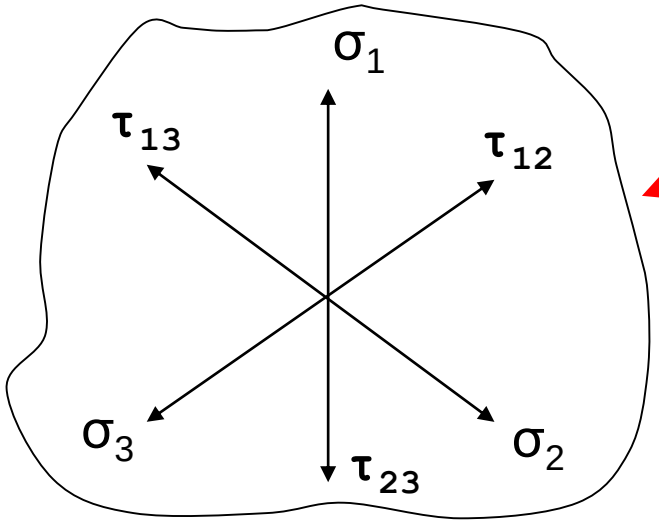
verifica di resistenza $\begin{cases} \sigma \le \sigma^t_L \\ \sigma \ge \sigma^c_L \end{cases}$ → **verifica di sicurezza** $\begin{cases} \sigma \le \sigma^t_{adm} \\ \sigma \ge \sigma^c_{adm} \end{cases}$

Graficamente, la verifica di sicurezza richiede che il punto rappresentativo dello stato di tensione di esercizio sia interno al segmento avente per estremi le due tensioni ammissibili:



I CRITERI DI RESISTENZA

Il problema è che in generale i carichi di esercizio inducono nelle strutture stati di tensione di tipo **pluriassiale**. Per poter effettuare **verifiche di resistenza** sarebbe allora necessario provare il materiale sotto un numero molto elevato di stati di tensione, caratterizzati da differenti combinazioni delle 6 componenti di tensione, costruire un dominio di resistenza nell'iperspazio delle 6 componenti di tensione e verificare che il punto rappresentativo dello stato tensionale di esercizio sia interno a tale dominio.
Siffatta operazione risulta molto complessa dal punto di vista sperimentale, anche al fine di garantire l'affidabilità e la riproducibilità dei risultati.



SUPERFICIE DI ROTTURA O DI SNERVAMENTO

I CRITERI DI RESISTENZA

3

Inoltre se si dispone di un solo punto di misura sperimentale vi è un problema teorico legato al confronto fra il vettore dell'iperspazio che rappresenta lo stato tensionale di esercizio e il vettore dell'iperspazio che rappresenta le condizioni limite: infatti fra i due vettori esistono infiniti ordinamenti (= criteri di confronto) parziali, ma nessun ordinamento totale.

Per risolvere questo problema sono stati introdotti i **CRITERI DI RESISTENZA**, ossia **modelli meccanici che permettono di confrontare, in termini di pericolosità, uno stato tensionale di esercizio qualunque con i valori delle tensioni limite convenzionali dedotti dalle prove monoassiali**.

È possibile definire i criteri di resistenza come **criteri di equivalenza del cimento**, nel senso che permettono di trasformare uno stato tensionale qualunque in uno stato di tensione monoassiale ugualmente pericoloso (nei confronti della crisi del materiale), detto **tensione ideale** σ_{id}.

La verifica di resistenza avviene quindi confrontando la tensione ideale con le tensioni limite convenzionali. Matematicamente si tratta di un ordinamento parziale nello spazio delle tensioni secondo un criterio prescelto.

I CRITERI DI RESISTENZA

3

Ad oggi non sono ancora state sviluppate teorie rigorose e di generale applicabilità, per cui si preferisce ricorrere a semplici criteri, basati su verosimili congetture circa le cause della crisi (suggerite sia dagli studi sperimentali che dalla modellazione microscopica del comportamento), che dimostrino un sufficiente accordo con i dati sperimentali, e che quindi risultino soddisfacenti ai fini dell' impiego tecnico.

Dal punto di vista storico, la prima formulazione di un criterio di resistenza si attribuisce a **Galileo** (inizi del XVII sec.) che riteneva la crisi dovuta al raggiungimento di un valore limite della tensione normale. Alla fine del XVII sec. **Mariotte** propose un'altra interpretazione, ritenendo che le massime capacità resistenti di un materiale venivano attinte al raggiungimento di un valore limite della deformazione. Un approccio ancora differente fu seguito da **Coulomb** (XVIII sec.), che spiegò le condizioni di rottura degli ammassi di terre incoerenti introducendo il concetto di attrito. Queste intuizioni furono riprese e formalizzate in veri e propri criteri di resistenza fra il XIX sec. e l' inizio del XX sec.: tra gli altri, si ricordano i contributi di **Rankine**, **Saint-Venant**, **Grashof**, **Mohr**, **Tresca** e **von Mises**.

I CRITERI DI RESISTENZA

3

La scelta del criterio da adottare dipende dall'accordo mostrato con i risultati sperimentali, tenendo anche presente le finalità della particolare applicazione che si deve svolgere. Ad esempio, per descrivere le condizioni di snervamento dell'acciaio è generalizzato l' impiego del criterio di **von Mises** (ad un parametro), mentre in meccanica delle rocce e delle terre si ricorre spesso al criterio di **Mohr-Coulomb** (a 2 parametri).

Per i materiali anisotropi si dimostra adeguato il criterio di **Hill**: una sua specializzazione, dovuta a **Tsai**, viene adottata per le verifiche di resistenza dei compositi fibro-rinforzati a comportamento ortotropo (si tratta di un criterio a 6 parametri). In altri casi si preferisce, per semplicità, adottare criteri di natura empirica, oppure derivanti dalla semplificazione di criteri più complessi: ad esempio le più recenti normative sul calcestruzzo strutturale fanno riferimento ad un'opportuna semplificazione del criterio di **Ottosen**.

Una volta stabilito il criterio da impiegare, per caratterizzare la resistenza del materiale nei confronti di stati di tensione qualsiasi è sufficiente determinare i parametri del modello, sulla base di poche prove sperimentali. Ad esempio se si adotta un criterio isotropo ad un solo parametro, come quello di **von Mises**, è sufficiente una sola prova monoassiale.

I CRITERI DI RESISTENZA

Per i materiali isotropi lo stato di tensione si può rappresentare attraverso le tensioni principali s_1, s_2 ed s_3, per cui il problema si riduce di complessità, in quanto si passa da uno studio nello spazio delle 6 tensioni ad uno studio nello spazio dei 3 autovalori.

Ciascun criterio è basato sull'impiego di una certa funzione scalare F delle tensioni principali s_1, s_2 ed s_3, detta **funzione di crisi**; dal confronto fra il valore assunto da F nello stato di tensione di esercizio

$$F(s_1, s_2, s_3)$$

ed il valore assunto nello stato di tensione monoassiale che si produce nelle prove di trazione o di compressione

$$F(\sigma_L, 0, 0)$$

è possibile dedurre l'espressione della tensione ideale relativa al criterio in esame. A questo punto la **verifica di resistenza** si scrive:

$$\begin{cases} \sigma_{id,t}(s_1, s_2, s_3) \leq \sigma^t_L \\ \sigma_{id,c}(s_1, s_2, s_3) \geq \sigma^c_L \end{cases}$$

IL CRITERIO DI GALILEO O DI NAVIER DELLA MASSIMA TENSIONE NORMALE

3

Il *criterio delle massime tensioni* discende da un'intuizione di Galileo, ripresa da Navier e formalizzata in un vero e proprio criterio di rottura da Rankine nel 1868. Si assume che il parametro determinate la crisi sia il **valore massimo della tensione normale**, al variare della giacitura nel punto; considerando il caso più generale di **materiali diversamente reagenti a trazione e compressione**, e dette σ^t_L e σ^c_L le tensioni limite in trazione ed in compressione (misurabili in una prova monoassiale), il criterio si traduce nelle seguenti condizioni sulle tensioni principali (che devono valere contemporaneamente):

$$\begin{cases} \sigma_{id,t} = s_1 = \max(s_1, s_2, s_3) \le \sigma^t_L \\ \sigma_{id,c} = s_3 = \min(s_1, s_2, s_3) \ge \sigma^c_L \end{cases}$$

Ovvero la crisi del materiale si verifica quando la tensione massima (di trazione o di compressione) raggiunge la corrispondente tensione limite in trazione o compressione.

L'applicazione di questo criterio conduce spesso a risultati inaffidabili (sovrastima o sottostima la resistenza a seconda dei casi), per cui nella pratica non viene più usato. La congettura sulla crisi è poco fondata meccanicamente, tenendo anche presente quello che abbiamo osservato a proposito della prova di trazione sui metalli (le linee di Lüders).

IL CRITERIO DI TRESCA O DELLA MASSIMA TENSIONE TANGENZIALE

3

Si tratta di un criterio risalente alla seconda metà del XIX sec., ed applicabile a **materiali con uguale resistenza a trazione e compressione**, ossia per i quali:

$$\sigma^t_L = \left|\sigma^c_L\right| = \sigma_L$$

Coerentemente con l'osservazione sperimentale delle linee di Lüders, si assume che la grandezza meccanica di riferimento ai fini della crisi (funzione di crisi) sia la **massima tensione tangenziale**:

$$\tau_{max} = \frac{s_1 - s_3}{2}$$

(con $s_1 \geq s_2 \geq s_3$). Nello stato limite (σ_L,0,0), misurato in una prova monoassiale la massima tensione tangenziale vale:

$$\tau_L = \frac{\sigma_L - 0}{2} = \frac{\sigma_L}{2}$$

Confrontando τ_{max} con τ_L si ha quindi:

$$\tau_{max} \leq \tau_L \quad \Rightarrow \quad \frac{s_1 - s_3}{2} \leq \frac{\sigma_L}{2}$$

Per cui la verifica di resistenza si scrive:

$$\sigma_{id}\left(s_1, s_2, s_3\right) = s_1 - s_3 \leq \sigma_L$$

Tale criterio è tuttora molto utilizzato e fornisce risultati molto vicini a quelli sperimentali soprattutto nel caso dei metalli molto duttili.

IL CRITERIO DI GRASHOF O DELLA MASSIMA DILATAZIONE

3

Si tratta di un criterio risalente alla seconda metà del XIX sec., che fornisce risultati apprezzabili soprattutto nel caso di **materiali fragili diversamente resistenti a trazione e compressione.**

Il criterio di Grashof assume che il parametro determinante la crisi sia il **valore massimo e minimo del coefficiente di dilatazione lineare**, al variare della giacitura nel piano. Per materiali a comportamento elastico lineare ed isotropo (→ COASSIALITA'), i valori massimo e minimo del coefficiente di dilatazione lineare sono

$$e_1 = \frac{1}{E}\left[s_1 - \nu\left(s_2 + s_3\right)\right] \qquad e_3 = \frac{1}{E}\left[s_3 - \nu\left(s_1 + s_2\right)\right]$$

(con $s_1 \geq s_2 \geq s_3$). Negli stati limite di tensione $(\sigma^t_L,0,0)$ e $(\sigma^c_L,0,0)$, si ha

$$\left(e_1\right)_L = \frac{\sigma^t_L}{E}, \qquad \text{e} \qquad \left(e_3\right)_L = \frac{\sigma^c_L}{E}.$$

Confrontando tali valori limite con quelli calcolati in corrispondenza dello stato di tensione di esercizio si conclude che la verifica di resistenza si scrive:

$$\begin{cases} \sigma_{id,t}\left(s_1, s_2, s_3\right) = s_1 - \nu\left(s_2 + s_3\right) \leq \sigma^t_L \\ \sigma_{id,c}\left(s_1, s_2, s_3\right) = s_3 - \nu\left(s_1 + s_2\right) \geq \sigma^c_L \end{cases}$$

I CRITERI ENERGETICI: IL CRITERIO DI BELTRAMI (1885)

Si tratta di un criterio applicabile a **materiali iperelastici ugualmente resistenti a trazione e compressione**. Beltrami ipotizzò che la crisi avvenisse quando la densità di energia di deformazione elastica, associata allo stato di tensione di esercizio, raggiungeva un valore limite, pari al valore della densità di energia di deformazione elastica in corrispondenza della crisi sotto uno stato di tensione monoassiale. Per cui si assume che il parametro determinante la crisi sia **la densità di energia di deformazione** .

Nel sistema di riferimento principale di tensione, relativamente allo stato di esercizio, si ha

$$\varphi = \frac{1}{2E}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_1 s_3\right)$$

(con $s_1 \geq s_2 \geq s_3$). Nello stato di tensione limite $(\sigma_L,0,0)$ misurati in una prova monoassiale, si ha

$$\varphi_L = \frac{1}{2E}\sigma_L^2$$

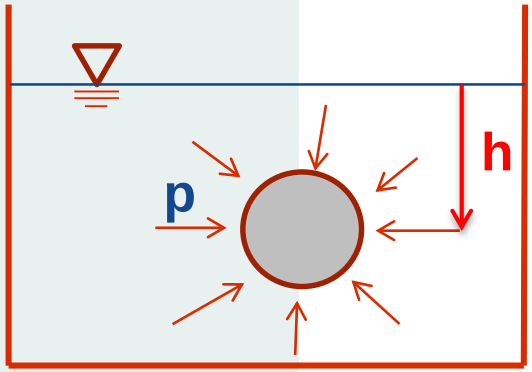
Confrontando il valore limite con quello calcolato in corrispondenza dello stato di tensione di esercizio si conclude che la verifica di resistenza si scrive:

$$\varphi \leq \varphi_L \Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2\nu\left(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_1 s_3\right)} \leq \sigma_L$$

Poiché l'energia specifica di deformazione è una funzione quadratica delle componenti di tensione, la funzione di crisi dipende solo dagli invarianti ortogonali principali primo e secondo $I_1(\boldsymbol{T})$ e $I_2(\boldsymbol{T})$ del tensore di tensione.

I CRITERI ENERGETICI: OSSERVAZIONE SPERIMENTALE DI HUBER (1904)

STATO IDROSTATICO DI COMPRESSIONE



$$p = \rho g h$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Stato idrostatico (sferico) di tensione:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$$

All'aumentare della profondità, aumenta la pressione. Abbiamo un valore massimo della pressione ad un valore di profondità limite (altezza).

Calcolo della profondità limite (altezza limite) con il criterio energetico di Beltrami:

$$\sigma_{id} = \sqrt{3p^2 - 2\nu p^2} = \sqrt{3-2\nu}\; p = \sqrt{3-2\nu}\; \rho g h \le \sigma_L$$

$$h \le \frac{\sigma_L}{\rho g \sqrt{3-2\nu}}$$

Huber osservò che il materiale anche per profondità 10 volte > del valore dell'altezza limite non va in crisi, ovvero può sopportare valori molto elevati di compressione. Huber propose una modifica del criterio di Beltrami, essenzialmente al fine di risolverne l'incapacità di rappresentare il comportamento per stati di **compressione idrostatica dei metalli**.

I CRITERI ENERGETICI: CRITERIO DI VON MISES

3

Se il materiale è **elastico, lineare e isotropo**, si ha:

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{E} \begin{cases} \mathbb{C}\mathbf{E}_S = 2\,\mu\mathbf{E}_S + \lambda\,(\mathrm{tr}\mathbf{E}_S)\,\mathbf{I} \in \mathrm{Sph} \Rightarrow \mathbb{C}\mathbf{E}_S = \mathbf{T}_S \\ \mathbb{C}\mathbf{E}_D = 2\,\mu\mathbf{E}_D + \lambda\,(\mathrm{tr}\mathbf{E}_D)\,\mathbf{I} \in \mathrm{Dev} \Rightarrow \mathbb{C}\mathbf{E}_D = \mathbf{T}_D \end{cases}$$

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\,\mathbf{E} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_D = \mathbb{C}(\mathbf{E}_S + \mathbf{E}_D) = \mathbb{C}\mathbf{E}_S + \mathbb{C}\mathbf{E}_D$$

Quindi il legame costitutivo si può decomporre in una parte associata alla sola variazione di volume e in una parte associata alla sola variazione di forma (non è così in generale).

Anche la densità energia di deformazione si può decomporre in somma:

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathbb{C}\,\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S + \frac{1}{2}\,\mathbb{C}\,\mathbf{E}_D \cdot \mathbf{E}_D$$

variazione di volume — *variazione di forma*

Si assume come parametro della crisi del materiale aliquota dell' energia potenziale elastica associata alle variazioni di forma, ossia l'**energia deviatorica** (o distorcente).

I CRITERI ENERGETICI: CRITERIO DI VON MISES

3

L'energia **deviatorica** (o distorcente) nel riferimento principale di tensione, è

$$\varphi_D = \frac{1}{12\mu}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2\right]$$

Nello stato di tensione limite $(\sigma_L,0,0)$: $\varphi_D^L = \frac{1}{12\mu} 2\sigma_L^2$

confrontando $\varphi_D \le \varphi_D^L$ si ha:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2\right]} \le \sigma_L$$

OSS.

- se $I_1(\mathbf{T}) = \mathrm{tr}\mathbf{T} < 0$, **stati tensionali di prevalente compressione** ➡ **criterio di von Mises**
- se $I_1(\mathbf{T}) = \mathrm{tr}\mathbf{T} > 0$, **stati tensionali di prevalente trazione** ➡ **criterio di Beltrami**

PARTICOLARIZZAZIONE PER IL SOLIDO DI DE SAINT-VENANT

Stati di tensione alla Saint-Venant

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Criterio di Grashof

$$\sigma_{id,t} \Big/ \sigma_{id,c} = \frac{1-\nu}{2}\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^2 + 4\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)}$$

Criterio di Tresca

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)}$$

Criterio di von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)}$$

$$\sigma_{id} \leq \sigma_{amm}$$

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_L}{\nu}$$

coefficiente di sicurezza (dipende dal materiale: 1,7÷1,8 acciaio, 2,5÷3 cls, 4÷10 murature)

PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (1)

1. Determinare i **diagrammi delle sollecitazioni** (M, T ed N) della struttura;
2. Individuare le sezioni critiche, ovvero le sezioni della struttura dove sono presenti le combinazioni più gravose tra le sollecitazioni;
3. Scegliere la sezione critica della struttura dove è presente il valore del momento flettente più alto (M_{max});
4. Progettare le dimensioni della sezione trasversale della struttura a momento flettente massimo (M_{max}) con la seguente formula:

$$\left|\sigma_{z,max}\right| = \frac{\left|M_{max}\right|}{Jx}\left|y_{max}\right| \leq \sigma_{amm}$$

ovvero confrontando il valore delle tensioni massime relative a tale M_{max} ottenute con la formula di Navier e il valore della tensione ammissibile assegnata σ_{amm}.

N.B.: (a) La tensione e il momento flettente vengono considerati in valore assoluto;

(b) y_{max} rappresenta la massima distanza dal baricentro misurata dal lembo superiore o dal lembo inferiore della sezione trasversale assegnata.

PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (2)

Se la sezione non è stata assegnata e se non conosciamo le dimensioni della sezione, si può procedere al progetto della struttura con la seguente formula:

$$\left|\sigma_{z,max}\right| = \frac{\left|M_{max}\right|}{Wx} \leq \sigma_{amm}$$

ovvero tramite il modulo di resistenza W_x.

In generale si hanno due valori di W_x, uno a trazione e uno a compressione:

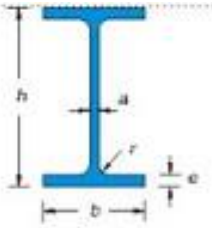
$$Wx' = \frac{Jx}{y'} \quad \text{(a trazione)} \rightarrow \left|\sigma_{z,max}^{(T)}\right| = \frac{\left|M_{max}\right|}{Wx'} \leq \sigma_{amm}$$

$$Wx'' = \frac{Jx}{y''} \text{(a compressione)} \rightarrow \left|\sigma_{z,max}^{(C)}\right| = \frac{\left|M_{max}\right|}{Wx''} \leq \sigma_{amm}$$

si utilizza il valore più piccolo di W_x per ottenere il valore più alto delle $\sigma_{z,\,max}$ (sovrastima).

PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (3)

Si confronta il valore di W_x ottenuto con i valori di W_x presenti nel sagomario relativo alla sezione scelta (per esempio sezione IPE UNI 5398-7):



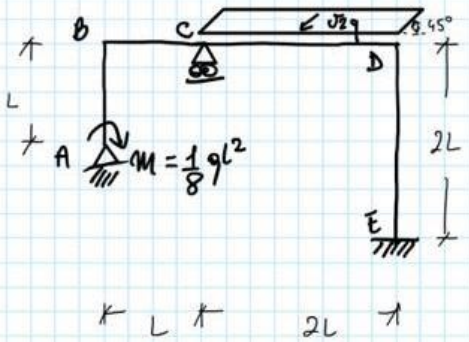
Download (dwg-pdf)

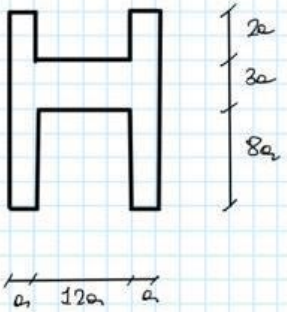
h mm	b mm	a mm	e mm	r mm	Peso kg/m	Sezione cm2	Momenti di inerzia Jx cm4	Momenti di inerzia Jy cm4	Moduli di resistenza Wx cm3	Moduli di resistenza Wy cm3	Raggi di inerzia ix cm	Raggi di inerzia iy cm
80	46	3,8	5,2	5	6,0	7,64	80,14	8,49	20,03	3,69	3,24	1,05
100	55	4,1	5,7	7	8,1	10,32	171,0	15,92	34,20	5,79	4,07	1,24
120	64	4,4	6,3	7	10,4	13,21	317,8	27,67	52,96	8,65	4,90	1,45
140	73	4,7	6,9	7	12,9	16,43	541,2	44,92	77,32	12,31	5,74	1,65
160	82	5,0	7,4	9	15,8	20,09	869,3	68,31	108,7	16,66	6,58	1,84
180	91	5,3	8,0	9	18,8	23,95	1.317	100,9	146,3	22,16	7,42	2,05
200	100	5,6	8,5	12	22,4	28,48	1.943	142,4	194,3	28,47	8,26	2,24
220	110	5,9	9,2	12	26,2	33,37	2.772	204,9	252,0	37,25	9,11	2,48
240	120	6,2	9,8	15	30,7	39,12	3.892	283,6	324,3	47,27	9,97	2,69
270	135	6,6	10,2	15	36,1	45,95	5.790	419,9	428,9	62,20	11,23	3,02
300	150	7,1	10,7	15	42,2	53,81	8.356	603,8	557,1	80,50	12,46	3,35
330	160	7,5	11,5	18	49,1	62,61	11.770	788,1	713,1	98,52	13,71	3,55
360	170	8,0	12,7	18	57,1	72,73	16.270	1.043	903,6	122,8	14,95	3,79
400	180	8,6	13,5	21	66,3	84,46	23.130	1.318	1.156	146,4	16,55	3,95
450	190	9,4	14,6	21	77,6	98,82	33.740	1.676	1.500	176,4	18,48	4,12
500	200	10,2	16,0	21	90,7	115,5	48.200	2.142	1.928	214,2	20,43	4,31

dal confronto si sceglie il rapporto tra le dimensioni della sezione scelta più opportuno.

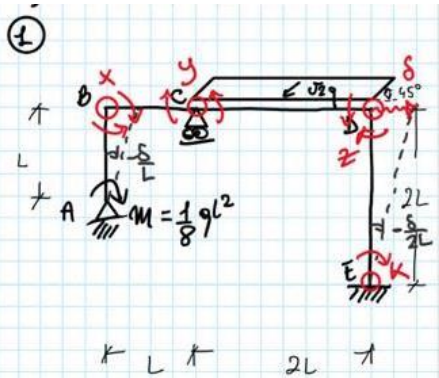
PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (4)

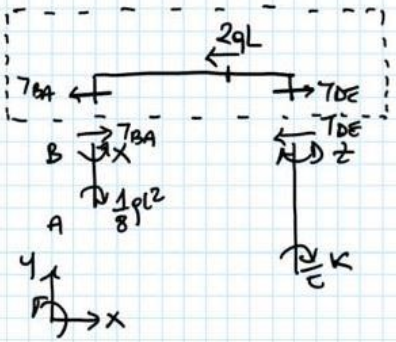
Progettare la seguente struttura per $q = 10\ kN/m$; $L = 4\ m$; $\sigma_{amm} = 200\ MPa$.





1) ANALISI STRUTTURALE
2) SEZIONI CRITICHE — 2a) PREDIMENSIONAMENTO A FLESSIONE
3) ANALISI DELLA TENSIONE
4) PUNTI CRITICI
5) VERIFICA DI SICUREZZA





INC $\{x, y, z, K, \delta\}$

EQ DI CONGRUENZA

$\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$ $\quad \frac{L}{6EJ}\left[\left(2X + \frac{1}{8}qL^2\right)\right] - \frac{\delta}{L} = \frac{L}{6EJ}\left[\left(-2X + y\right)\right]$

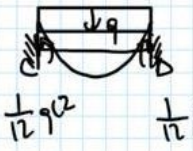
$\varphi_{CB} = \varphi_{CD}$ $\quad \frac{L}{6EJ}\left[\left(-2y + x\right)\right] = \frac{2L}{6EJ}\left[\left(2y - z\right) - \left(2\cdot\frac{1}{3}qL^2 + \frac{1}{3}qL^2\right)\right]$

$\varphi_{DC} = \varphi_{DE}$ $\quad \frac{2L}{6EJ}\left[\left(2z - y\right) - \left(-2\cdot\frac{1}{3}qL^2 - \frac{1}{3}qL^2\right)\right] = \frac{2L}{6EJ}\left[\left(-2z + x\right)\right] - \frac{\delta}{2L}$

$\varphi_E = 0$ $\quad \frac{2L}{6EJ}\left[\left(-2K + z\right)\right] - \frac{\delta}{2L} = 0$

$$\varphi_{AB} = \frac{L}{6EJ}\left[\left(2M_A - M_B\right) - \left(2\mu_A - \mu_B\right)\right] \pm \frac{\delta}{L}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{L}{6EJ}\left[\left(2M_B - M_A\right) - \left(2\mu_B - \mu_A\right)\right] \pm \frac{\delta}{L}$$



$\frac{1}{12}q(2L)^2 = \frac{1}{3}qL^2$

PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (5)

EQ DI PIANO

$T_{BE} - 2qL - T_{BA} = 0 \rightarrow z + K - 2X - \frac{30}{8} qL^2 = 0$

$-T_{BA} L - \frac{1}{8} qL^2 + X = 0$

A) $T_{BA} = -\frac{1}{8} qL + \frac{X}{L}$

$T_{DE} 2L - z - K = 0$

E) $T_{DE} = \frac{z + K}{2L}$

EQ DI CONGRUENZA + EQ DI PIANO $\rightarrow$

$X = -\frac{1566}{1216} qL^2$

$y = \frac{284}{1216} qL^2$

$z = \frac{419}{1216} qL^2$

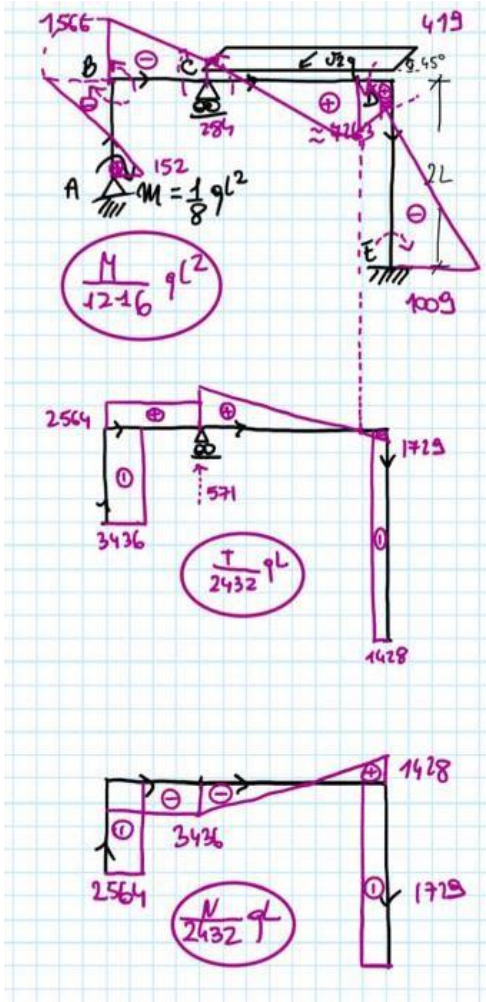
$K = \frac{1009}{1216} qL^2$

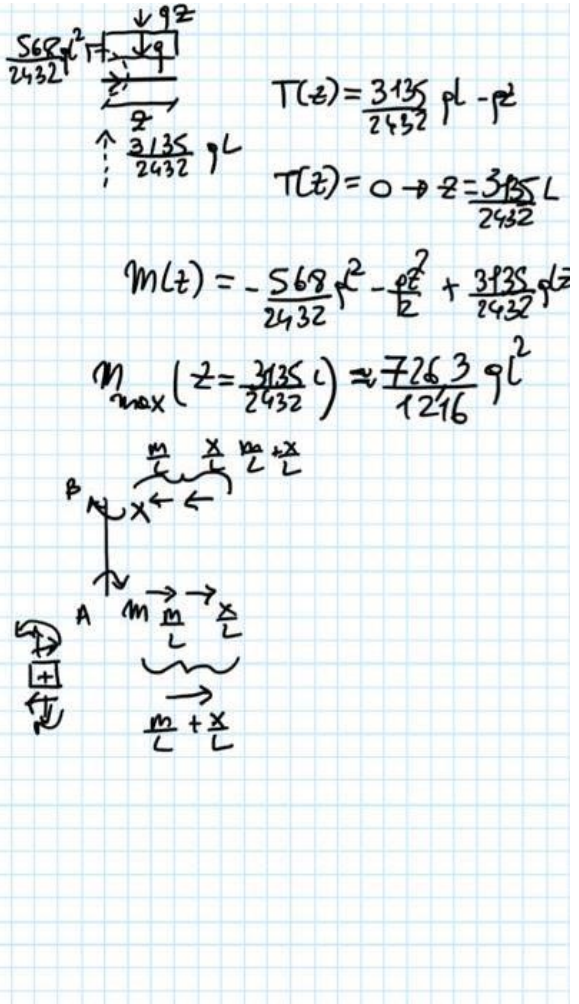
$A = -\frac{1598}{304} qL^2$

$A = \frac{6EJ}{L^2} \delta$

$\downarrow$

$\delta = -\frac{1598}{1824} \frac{qL^4}{EJ}$





PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (6)

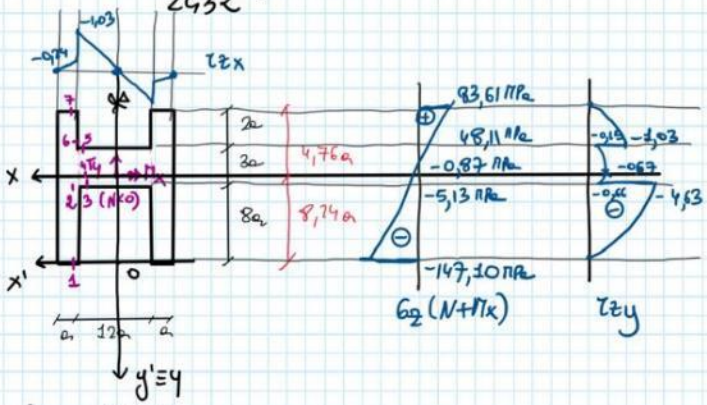
② SEZIONI CRITICHE

	M	T	N
AB	M^+	T^-_{max}	N^-
BA	M^-_{max}	T^-_{max}	N^-
BC	M^-_{max}	T^+	N^-_{max}
CB	M^-	T^+	N^-_{max}
CD	M^-	T^+_{max}	N^-_{max}
DC	M^+	T^-	N^+
DE	M^+	T^-	N^-
ED	M^-	T^-	N^-

$M_{max}^- = -\frac{1566}{2276} qL^2 = -206,1\ kNm$

$T_{max}^- = -\frac{3436}{2432} qL = -56,6\ kN$

$N^- = -\frac{2564}{2432} qL = -42,2\ kN$



$A_{TOT} = 62a^2$

$y_4 = -\frac{511a^3}{62a^2} = -8,24a$

$J_x = 529,0379\ a^4$

2a PREDIMENSIONAMENTO

$|\sigma_{z\,max}| = \left|\frac{M_{x\,max}}{J_x}\right| |y_{max}| \leq 6\ amm$

$\sigma_a \quad \frac{206,1 \cdot 10^6\ N\,mm}{529,0379\,a^4}\ 8,24a \leq 200\ \frac{N}{mm^2}$

$\sigma_a \quad a = \sqrt[3]{\frac{206,1 \cdot 10^6 \cdot 8,24}{529,0379 \cdot 200}} = 25,22\ mm$

$\downarrow +10\%$

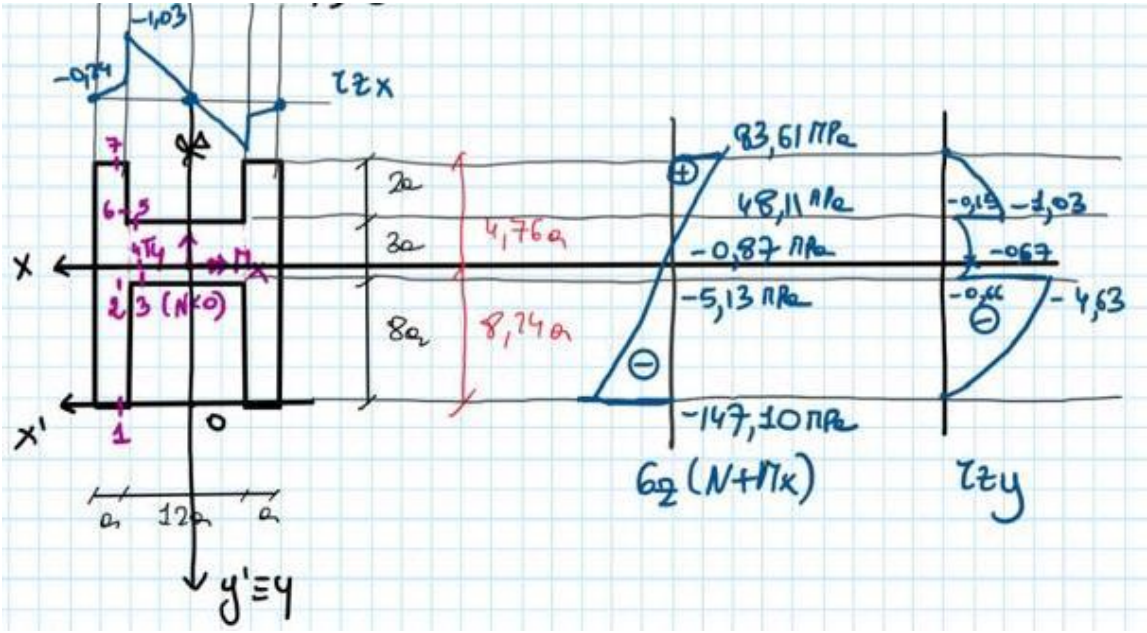
$a = 28\ mm$

$A_{TOT} = 4,8608 \cdot 10^4\ mm^2$

$J_x = 3,258 \cdot 10^8\ mm^4$

PROGETTO E VERIFICA DI UNA STRUTTURA (7)

$$\sigma_{id}^{TRESCA} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right)}$$



③ ANALISI DELLA TENSIONE

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y = \dots$$

$y = -4,76a$
$y = -2,76a$
$y = 0$
$y = 0,24a$
$y = 8,24a$

$\sigma_{id}^{TRESCA} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)} \leq \sigma_{amm}$

PUNTI	σ_z	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{id}	rispetta $\sigma_{id} \leq \sigma_{amm}$
1	-147,10	-0,24	0	147,10	✓
2	-5,13	-0,24	-4,63	10,53	✓
3	-5,13	-1,03	-0,66	5,68	✓
4	-0,87	-1,03	-0,67	2,60	✓
5	48,11	-1,03	-0,15	48,16	✓
6	48,11	-0,24	-1,03	48,16	✓
7	83,61	-0,24	0	83,61	✓

METODO ALLE TENSIONI AMMISSIBILI (!!!)

4

Una qualunque verifica è da ritenersi soddisfatta se accade che:

$$S_k \leq \frac{R_k}{F}$$

in cui S_k ed R_k sono i valori **caratteristici** ed F è il coefficiente (o fattore) di sicurezza (globale).

Il metodo delle tensioni ammissibili nasce come un **metodo deterministico**, che confronta la **sollecitazione** (o azione/effetto dell'azione) con la **resistenza** (o capacità). Il fattore di sicurezza è il rapporto tra la resistenza e la sollecitazione, che, va da sé, deve essere necessariamente maggiore di 1 affinché la verifica sia soddisfatta.

Questo metodo era utilizzato nel passato e si può considerare parzialmente utilizzabile nel nostro attuale codice per casi molto semplici. Quando, perciò, si ha a che fare con **costruzioni esistenti**, chiaramente tutte le valutazioni, al fine di potere effettuare una diagnosi strutturale, devono scaturire dalla consapevolezza dell'approccio progettuale adoperato nel passato.

METODO SEMIPROBABILISTICO AGLI STATI LIMITE

4

È utilizzato per facilità di applicazione e di esecuzione. Tiene conto dell'aleatorietà delle grandezze R ed S, e ne copre le incertezze, attraverso i suoi valori caratteristici. Una qualunque verifica è da ritenersi soddisfatta se accade che:

$$S_d = \gamma_A S_k \leq \frac{R_k}{\gamma_M} = R_d$$

in cui i valori caratteristici S_k ed R_k sono trasformati in valori di calcolo S_d ed R_d attraverso i **coefficienti parziali**. La verifica è svolta per ogni stato limite *n* che comprende *m* combinazioni (*n* x *m* casi).

Il valore caratteristico di una grandezza è un valore che ha una predefinita probabilità di essere superato e, analogamente, di essere minorato. Il termine **semiprobabilistico** deriva dal fatto che si entra nella/e relazione/i **con grandezze caratteristiche che sono valutate in maniera statistica o probabilistica** (es. Per ottenere R_k si passa dalla variabile aleatoria *R*, la sua funzione densità di probabilità sino ad un valore che ha una certa probabilità di essere superato), che però sono **confrontate deterministicamente**.

D.M. 17.01.2018

4

Nel seguito sono riportati i criteri del metodo semiprobabilistico agli stati limite basato sull'impiego dei coefficienti parziali, applicabili nella generalità dei casi; tale metodo è detto di primo livello. Per opere di particolare importanza si possono adottare metodi di livello superiore, tratti da documentazione tecnica di comprovata validità di cui al Capitolo 12.
Nel metodo agli stati limite, la sicurezza strutturale nei confronti degli stati limite ultimi deve essere verificata confrontando la capacità di progetto R_d, in termini di resistenza, duttilità e/o spostamento della struttura o della membratura strutturale, funzione delle caratteristiche meccaniche dei materiali che la compongono (X_d) e dei valori nominali delle grandezze geometriche interessate (a_d), con il corrispondente valore di progetto della domanda E_d, funzione dei valori di progetto delle azioni (F_d) e dei valori nominali delle grandezze geometriche della struttura interessate.

La verifica della sicurezza nei riguardi degli stati limite ultimi (SLU) è espressa dall'equazione formale:

$$R_d \geq E_d \qquad [2.2.1]$$

Il valore di progetto della resistenza di un dato materiale X_d è, a sua volta, funzione del valore caratteristico della resistenza, definito come frattile 5 % della distribuzione statistica della grandezza, attraverso l'espressione: $X_d = X_k/\gamma_M$, essendo γ_M il fattore parziale associato alla resistenza del materiale.

Il valore di progetto di ciascuna delle azioni agenti sulla struttura F_d è ottenuto dal suo valore caratteristico F_k, inteso come frattile 95%della distribuzione statistica o come valore caratterizzato da un assegnato periodo di ritorno, attraverso l'espressione: $F_d = \gamma_F F_k$ essendo γ_F il fattore parziale relativo alle azioni. Nel caso di concomitanza di più azioni variabili di origine diversa si definisce un valore di combinazione $\psi_0 F_k$, ove $\psi_0 \leq 1$ è un opportuno coefficiente di combinazione, che tiene conto della ridotta probabilità che più azioni di diversa origine si realizzino simultaneamente con il loro valore caratteristico.

Per grandezze caratterizzate da distribuzioni con coefficienti di variazione minori di 0,10, oppure per grandezze che non riguardino univocamente resistenze o azioni, si possono considerare i valori nominali, coincidenti con i valori medi.

I valori caratteristici dei parametri fisico-meccanici dei materiali sono definiti nel Capitolo 11. Per la sicurezza delle opere e dei sistemi geotecnici, i valori caratteristici dei parametri fisico-meccanici dei terreni sono definiti nel § 6.2.2.

La capacità di garantire le prestazioni previste per le condizioni di esercizio (SLE) deve essere verificata confrontando il valore limite di progetto associato a ciascun aspetto di funzionalità esaminato (C_d), con il corrispondente valore di progetto dell'effetto delle azioni (E_d), attraverso la seguente espressione formale:

$$C_d \geq E_d \qquad [2.2.2]$$